



**Universidad Nacional Mayor de San Marcos**

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Profesional de Computación Científica

**Solución de ecuaciones parabólicas no lineales por el  
método de elementos finitos**

**TESIS**

Para optar el Título Profesional de Licenciada en Computación  
Científica

**AUTOR**

Guiomar Amanda LEÓN ROJAS

**ASESOR**

Víctor Rafael CABANILLAS ZANNINI

Lima, Perú

2019



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

## Referencia bibliográfica

---

León, G. (2019). *Solución de ecuaciones parabólicas no lineales por el método de elementos finitos*. Tesis para optar el título de Licenciada en Computación Científica. Escuela Profesional de Computación Científica, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.

---

**Código ORCID del autor:** -

**Código ORCID del asesor:** 0000-0003-2325-8824

**Grupo de investigación:** Grupo de ecuaciones diferenciales, análisis y aplicaciones.

**Institución que financió totalmente la investigación:** VRIP-UNMSM.

**Ubicación geográfica:** En las sedes de la UNMSM en Lima.

**Rango de años que la investigación abarcó:** 1 año y 10 meses.



# UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA

## FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

### Escuela Profesional de Computación Científica

#### ACTA DE SUSTENTACION DE TESIS PARA OBTENER EL TITULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN COMPUTACIÓN CIENTÍFICA

En la Ciudad Universitaria, Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 17:10 hrs. del martes 16 de abril del 2019, se reunieron los miembros del Jurado Evaluador:

Dra. Roxana López Cruz

Presidente

Dr. Pedro Espinoza Haro

Miembro

Dr. Víctor Rafael Cabanillas Zannini

Miembro Asesor

Para la sustentación de la tesis intitulada «SOLUCIÓN DE ECUACIONES PARABÓLICAS NO LINEALES POR EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS», presentada por el bachiller GUIOMAR AMANDA LEÓN ROJAS, para obtener el Título Profesional de Licenciada en Computación Científica.

Luego de la exposición de la Tesis, el Presidente invitó a la expositora a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los miembros del jurado, la expositora mereció la aprobación SOBRESALIENTE, con un calificativo promedio de 18 DIECIOCHO (Números y letras).

A continuación los miembros del jurado, dan manifiesto que el bachiller GUIOMAR AMANDA LEÓN ROJAS, en virtud de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciada en Computación Científica.

Siendo las 18:20 Horas, se levantó la Sesión, firmando para constancia la presente ACTA en tres (3) copias originales.

Dra. Roxana López Cruz  
Presidente

Dr. Pedro Espinoza Haro  
Miembro

Dr. Víctor Rafael Cabanillas Zannini  
Miembro Asesor

# Agradecimientos

Expreso mi más sincero agradecimiento a todas las personas que me brindaron su oportuno apoyo para hacer posible el desarrollo de esta tesis. En ese sentido, hago mención especial al Vicerrectorado de Investigación y Posgrado (VRIP) de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, por concederme el financiamiento otorgado por el Programa de Promoción de Tesis de Pregrado que me ha permitido la ejecución de este trabajo. De la misma manera, agradezco al Dr. Víctor Rafael Cabanillas Zannini por asesorarme y así trabajar bajo su orientación. Igualmente, agradezco al Dr. Ángel Enrique Ramírez Gutiérrez por sus oportunas sugerencias y disponibilidad de su tiempo. Finalmente, a mi familia por su siempre incondicional apoyo y comprensión.

# RESUMEN

## Solución de Ecuaciones Parabólicas no lineales por el Método de Elementos Finitos

Guiomar Amanda León Rojas

Abril 2019

Asesor: Dr. Víctor Rafael Cabanillas Zannini.

Título obtenido: Licenciada en Computación Científica.

En el presente trabajo desarrollamos el método de elementos finitos para resolver un problema parabólico no lineal como es el caso de la ecuación de Fisher-Kolmogorov unidimensional, la cual es una clase importante de ecuaciones de reacción-difusión. Primero partimos con la aplicación del método de elementos finitos para resolver una ecuación diferencial lineal sujeta a condiciones de frontera, posteriormente se desarrolla el método de elementos finitos para resolver una ecuación diferencial no lineal con condiciones de frontera. Finalmente resolvemos por el método de elementos finitos la ecuación de Fisher-Kolmogorov sujetas a condiciones inicial y de frontera, cuyos resultados numéricos son mostrados en las gráficas obtenidas en MATLAB.

**Palabras Claves:** Fisher-Kolmogorov, método de elementos finitos, EDO no lineal.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>i</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Integración Gaussiana . . . . .	1
1.2. Algunos resultados en análisis matricial . . . . .	4
1.3. Método de Newton . . . . .	6
1.3.1. Relajación . . . . .	12
1.3.2. Criterios de parada . . . . .	13
1.3.3. Ejemplo de aplicación . . . . .	13
1.4. Algunos resultados en análisis funcional . . . . .	14
1.4.1. Espacios $L^p$ . . . . .	14
1.4.2. Distribuciones . . . . .	15



1.4.3.	Espacios de Sobolev . . . . .	16
1.4.4.	Problemas variacionales abstractos . . . . .	18
<b>2.</b>	<b>Método de elementos finitos unidimensionales: Caso lineal</b>	<b>20</b>
2.1.	Espacio de polinomios lineales . . . . .	20
2.2.	Funciones de base . . . . .	22
2.2.1.	Espacio de las funciones lineales continuas por partes . . . . .	22
2.3.	Formulación del problema . . . . .	25
2.3.1.	Formulación variacional . . . . .	26
2.4.	Aproximación por el método de elementos finitos . . . . .	29
2.4.1.	Elementos y nodos . . . . .	30
2.4.2.	Funciones de base locales . . . . .	31
2.5.	Matriz de rigidez y vector de carga locales . . . . .	34
2.5.1.	Matriz de rigidez local . . . . .	34
2.5.2.	Vector de carga local . . . . .	39
2.6.	Ensamblaje de la matriz de rigidez y vector de carga globales . . . . .	41
2.7.	Modelos unidimensionales . . . . .	45
2.8.	Resultados numéricos . . . . .	50

<b>3. Método de elementos finitos unidimensionales: Caso no lineal</b>	<b>54</b>
3.1. Un problema modelo . . . . .	54
3.2. Aplicación del método de Newton . . . . .	55
3.3. Formulación variacional . . . . .	56
3.4. Aproximación por el método de elementos finitos . . . . .	58
3.4.1. Ensamblaje de las ecuaciones algebraicas . . . . .	58
3.5. Cálculo de la matriz jacobiana . . . . .	60
3.6. Ejemplos numéricos . . . . .	62
<b>4. Método de elementos finitos aplicado a una ecuación parabólica no lineal</b>	<b>67</b>
4.1. Solución analítica de la ecuación de Fisher-Kolmogorov . . . . .	68
4.1.1. Soluciones de onda viajera . . . . .	68
4.1.2. Método de Factorización para EDOs con polinomios no lineales . . . . .	73
4.1.3. Método de Perturbación . . . . .	77
4.2. Discretización del tiempo . . . . .	81
4.3. Aplicación del método de elementos finitos a una EDO no lineal . . . . .	82
4.3.1. Formulación Variacional . . . . .	83
4.4. Emsamblaje de las ecuaciones algebraicas . . . . .	84

4.5. Aproximación de las integrales por medio de la cuadratura de Gauss-Legendre . . . .	87
4.6. Algoritmo para calcular la solución por elementos finitos . . . . .	88
4.7. Resultados numéricos . . . . .	90
<b>5. Conclusiones</b>	<b>108</b>
<b>A. Una breve descripción de EDPs no lineales con MATLAB</b>	<b>110</b>
<b>B. Códigos de implementación</b>	<b>121</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>125</b>

# Introducción

Tanto las ecuaciones diferenciales parciales, así como las ecuaciones diferenciales ordinarias proporcionan buenos ejemplos de computación científica, ya que motiva a una serie de problemas relacionados a ella como son sistemas de ecuaciones lineales, no lineales, interpolación, aproximación, etc. Estos modelos ilustran problemas matemáticos interesantes y a su vez conducen a problemas interesantes de programación (la necesidad de estructuras de datos, visualización, etc) y son importantes para resolver problemas aún más complicados. Como sabemos, la mayoría de los procesos físicos son modelados por las ecuaciones diferenciales parciales: ecuaciones que contienen más de una variable independiente. La mayoría de estos modelos que se suelen estudiar son lineales. Sin embargo, la naturaleza de un gran número de problemas reales son no lineales. La presencia de esa no linealidad en un determinado modelo matemático, da lugar a muchos fenómenos interesantes que no ocurren en el caso lineal. En este sentido, resulta motivador el estudio de problemas no lineales, que desde el punto de vista numérico, se han desarrollado diversos métodos, con la finalidad de obtener soluciones aproximadas, cada vez más cercanas a la solución exacta.

En los cursos de pregrado se estudia una variedad de dichos métodos de solución para diversas ecuaciones en derivadas parciales (EDPs). Desde que el estudio de problemas dependientes del tiempo, que se conocen como problemas de evolución, son importantes debido a su amplia aplicación en áreas de economía, ingeniería y física, en el presente trabajo se aborda la aplicación del método de elementos finitos a una ecuación diferencial parcial de tipo parabólico no lineal. La elección del método de elementos finitos se debe, a que ningún trabajo de licenciatura en Computación Científica ha sido desarrollado utilizando este método para resolver problemas de evolución como abordamos en esta tesis. Por tal razón nos interesa la aplicación del método de elementos finitos a

la solución de problemas parabólicos no lineales, particularmente a la ecuación de Fisher-Kolmogorov.

Partiendo de la ecuación del calor

$$u_t = u_{xx}, \quad (1)$$

que describe la difusión del calor en un sólido o la propagación de una enfermedad en una población, cuando agregamos un término  $f(x, t, u)$  a (1) se obtiene

$$u_t = u_{xx} + f(x, t, u), \quad (2)$$

entonces la ecuación anterior se convierte en una ecuación de reacción-difusión, ya que combina estos dos procesos y pertenecen a una clase importante de ecuaciones en derivadas parciales.

Si  $f(x, t, u) = u(1 - u)$  es la ecuación de Fisher-Kolmogorov, constituye uno de los ejemplos más elementales de este tipo de ecuaciones, además tiene una gran importancia por encontrarse en diversas aplicaciones como los procesos biológicos como se puede ver en [23], las reacciones químicas, la combustión, etc. En general, no puede ser resuelta analíticamente por lo que se recurre a la aplicación de diversas técnicas numéricas para su resolución como se puede ver en los artículos [33], [21], [6], [22] y [32].

El presente trabajo está organizado como sigue: En el capítulo I se presentan algunos resultados sobre el análisis numérico y análisis funcional que se utilizan en capítulos posteriores.

En el capítulo II se desarrolla el proceso de aplicación del método de elementos finitos a una ecuación diferencial lineal unidimensional con condiciones de frontera.

A lo largo del capítulo III, se aborda la aplicación del método de elementos finitos a una ecuación diferencial no lineal unidimensional con condiciones de frontera.

En el capítulo IV, gracias al desarrollo de los capítulos anteriores se puede resolver una ecuación parabólica no lineal unidimensional, como es la ecuación de Fisher-Kolmogorov sujeta a condiciones iniciales y de frontera, por el método de elementos finitos. Para su resolución se realiza implementaciones computacionales en MATLAB 2013, el cual es un software destinado a realizar cálculos numéricos, científicos y es ampliamente utilizado en el campo de la ingeniería.

El trabajo termina, como es natural, en conclusiones. En el apéndice presentamos una breve descripción acerca de una función propia de MATLAB, frecuentemente utilizada en el capítulo IV y finalmente los códigos implementados en MATLAB que aproxima las soluciones de la ecuación de Fisher-Kolmogorov.

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1. Integración Gaussiana

El *método de la cuadratura Gaussiana* también conocido como la *cuadratura de Gauss-Legendre*, es el más apropiado para aproximar una integral definida.

En la cuadratura Gaussiana, debemos elegir un conjunto de *nodos*  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  en el intervalo de integración  $[a, b]$ , así como el conjunto apropiado de coeficientes  $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  denominados *pesos*, para obtener una fórmula de cuadratura de la siguiente forma:

$$\int_a^b f(x) \, dx \approx \omega_1 f(x_1) + \omega_2 f(x_2) + \dots + \omega_n f(x_n).$$

En esta fórmula de aproximación, tanto los pesos y nodos se eligen de manera óptima, así tenemos  $2n$  parámetros libres para ser escogidos, por lo tanto, el tipo de polinomio que es posible esperar para que la fórmula sea exacta es de grado menor o igual que  $2n - 1$ .

Por ejemplo, podemos encontrar nodos  $x_1, x_2$  y pesos  $\omega_1, \omega_2$  tales que

$$\int_{-1}^1 f(x) \, dx \approx \omega_1 f(x_1) + \omega_2 f(x_2),$$

notamos que tenemos  $2(2) = 4$  parámetros, luego  $f(x)$  debe ser un polinomio de grado  $2(2) - 1 = 3$  o menor, es decir, cuando

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

para algún conjunto de constantes  $a_0, a_1, a_2$  y  $a_3$ . Dado que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^1 (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) dx \\ &= a_0 \int_{-1}^1 1 dx + a_1 \int_{-1}^1 x dx + a_2 \int_{-1}^1 x^2 dx + a_3 \int_{-1}^1 x^3 dx, \end{aligned}$$

equivale a demostrar que la fórmula de aproximación produce resultados exactos cuando  $f(x)$  es 1,  $x$ ,  $x^2$  y  $x^3$ . Así, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 1 dx &= \omega_1 + \omega_2 \\ \int_{-1}^1 x dx &= \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 \\ \int_{-1}^1 x^2 dx &= \omega_1 x_1^2 + \omega_2 x_2^2 \\ \int_{-1}^1 x^3 dx &= \omega_1 x_1^3 + \omega_2 x_2^3 \end{aligned}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \omega_1 + \omega_2 &= 2 \\ \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 &= 0 \\ \omega_1 x_1^2 + \omega_2 x_2^2 &= \frac{2}{3} \\ \omega_1 x_1^3 + \omega_2 x_2^3 &= 0, \end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \omega_1 = \omega_2 &= 1, \\ x_1 &= -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$



Luego, tenemos la siguiente fórmula de cuadratura:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Extendemos esta técnica para determinar nodos y pesos de las fórmulas de cuadratura que proporcionen resultados exactos con polinomios de grado superior, es decir, encontrar nodos  $1, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  y pesos  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n$  tales que la fórmula

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \omega_1 f(x_1) + \omega_2 f(x_2) + \dots + \omega_n f(x_n) \quad (1.1)$$

sea exacta para cada monomio  $1, x, x^2, \dots, x^{2n-1}$ . Por lo tanto, la fórmula será exacta para cualquier polinomio de grado  $2n - 1$  o menor. Dichos polinomios son los polinomios de Legendre, para los cuales se demuestra que los nodos son soluciones o raíces del polinomio de Legendre de grado  $n$ , este resultado se puede ver en el libro [5].

A continuación mostramos la lista de nodos y pesos para  $n = 4$  y  $n = 5$ .

$n$	Nodos $x_i$	Pesos $\omega_i$
4	$-\sqrt{\frac{3}{7} + \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{30}}{36}$
	$-\sqrt{\frac{3}{7} - \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{30}}{36}$
	$\sqrt{\frac{3}{7} - \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{30}}{36}$
	$\sqrt{\frac{3}{7} + \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{30}}{36}$
5	$-\frac{1}{3}\sqrt{5 + 2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{161}{450} - \frac{13\sqrt{70}}{900}$
	$-\frac{1}{3}\sqrt{5 - 2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{161}{450} + \frac{13\sqrt{70}}{900}$
	0	$\frac{128}{225}$
	$\frac{1}{3}\sqrt{5 - 2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{161}{450} + \frac{13\sqrt{70}}{900}$
	$\frac{1}{3}\sqrt{5 + 2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{161}{450} - \frac{13\sqrt{70}}{900}$

Tabla 1.1: Lista de nodos y pesos

Para aplicar la cuadratura Gaussiana es necesario tener el intervalo de integración  $[-1, 1]$ . Una integral arbitraria  $\int_a^b f(x) dx$  se puede transformar en  $\int_{-1}^1 f(x) dx$  usando el cambio de variable siguiente:

$$t = \frac{2x - a - b}{b - a} \iff x = \frac{a + b}{2} + \frac{b - a}{2}t.$$

Luego, obtenemos la fórmula aplicable a cualquier intervalo de integración  $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b - a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{a + b}{2} + \frac{b - a}{2}t\right) dt.$$

y se da la forma de (1.1), obtenemos

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \frac{b - a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{a + b}{2} + \frac{b - a}{2}t\right) dt \\ &= \frac{b - a}{2} \left[ \omega_1 f\left(\frac{a + b}{2} + \frac{b - a}{2}x_1\right) + \omega_2 f\left(\frac{a + b}{2} + \frac{b - a}{2}x_2\right) + \dots + \omega_n f\left(\frac{a + b}{2} + \frac{b - a}{2}x_n\right) \right] \\ &= \frac{b - a}{2} \sum_{i=1}^n \omega_i f\left(\frac{a + b}{2} + \frac{b - a}{2}x_i\right). \end{aligned}$$

## 1.2. Algunos resultados en análisis matricial

Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n$  con entradas reales o complejas, sea  $\lambda \in \mathbb{C}$  llamado autovalor de  $A$  si existe un vector no nulo  $x \in \mathbb{C}^n$  tal que  $Ax = \lambda x$ , este vector es denominado autovector asociado con el autovalor  $\lambda$ .

El espectro de  $A$ , denotado por  $\sigma(A)$ , es el conjunto de autovalores de  $A$ . El módulo máximo de los autovalores de  $A$  es denominado radio espectral de  $A$  y es denotado por:

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

**Definición 1.** La norma de una matriz es una aplicación  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

1.  $\|A\| \geq 0$  para todo  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $\|A\| = 0$  si y solo si  $A = 0$ .
2.  $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$  para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ , para todo  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .
3.  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$  para todo  $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

**Definición 2.** Decimos que una norma matricial  $\|\cdot\|$  es compatible o consistente con una norma vectorial  $\|\cdot\|$  si

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|, \quad \text{para todo } A \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

**Teorema 1.** Sea  $A$  una matriz consistente, entonces

$$\rho(A) \leq \|A\| \quad \text{para todo } A \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

*Demostración.* Ver la prueba en [25]. □

**Definición 3.** El radio espectral satisface

$$\rho(A) = \inf_{\|\cdot\|} \|A\|,$$

el ínfimo es tomado sobre todas las normas matriciales consistentes.

**Definición 4.** Una sucesión de matrices  $\{A^{(k)}\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  se dice convergente a la matriz  $A \in \mathbb{R}^n$  si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k - A\| = 0.$$

**Teorema 2.** Sea  $A$  una matriz cuadrada, entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0 \quad \text{si y solo si } \rho(A) < 1.$$

Además la serie geométrica  $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$  es convergente si y solo si  $\rho(A) < 1$ , entonces

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I - A)^{-1}.$$

Como un resultado, si  $\rho(A) < 1$  la matriz  $I - A$  es invertible y la siguiente desigualdad se cumple

$$\frac{1}{1 + \|A\|} \leq \|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$$

donde  $\|\cdot\|$  es una norma matricial inducida tal que  $\|A\| < 1$ .

*Demostración.* Ver la prueba en [25]. □

### 1.3. Método de Newton

La resolución de ecuaciones no lineales es un problema que surge frecuentemente del estudio de una amplia variedad de problemas prácticos.

La expresión general de un sistema de ecuaciones no lineales es

$$\begin{aligned} R_1(u_1, u_2, \dots, u_n) &= 0, \\ R_2(u_1, u_2, \dots, u_n) &= 0, \\ &\vdots \\ R_n(u_1, u_2, \dots, u_n) &= 0. \end{aligned}$$

donde  $R_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ , es una función componente no lineal respecto a cualquiera de las variables  $u_i$ , entonces el sistema no lineal se puede escribir en forma vectorial como

$$R(u) = 0 \tag{1.2}$$

donde  $u$  es un vector desconocido de  $n$  variables:  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  y  $R$  es la función vectorial  $R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que

$$R(u_1, u_2, \dots, u_n) = (R_1(u_1, u_2, \dots, u_n), R_2(u_1, u_2, \dots, u_n), \dots, R_n(u_1, u_2, \dots, u_n)).$$

Si  $R \in C^1(\mathbb{R})$ , denominamos *matriz jacobiana* de  $R$  en  $u \in \mathbb{R}^n$ , a la matriz real de orden  $n \times n$ :

$$J_R(u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial u_1} & \frac{\partial R_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial R_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial R_2}{\partial u_1} & \frac{\partial R_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial R_2}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial R_n}{\partial u_1} & \frac{\partial R_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial R_n}{\partial u_n} \end{bmatrix}$$

Vamos a considerar el sistema no lineal (1.2) y supongamos que  $u^*$  es solución, es decir,  $R(u^*) = 0$ . La idea es aproximar  $R$  alrededor de un valor conocido  $u$  como una serie de Taylor alrededor de dicho punto, manteniendo solo la parte lineal. Tomando una componente arbitraria  $R_i$  se tiene

$$R_i(u^*) \approx R_i(u) + \sum_{j=1}^n J_{R_{ij}}(u_j^* - u_j), \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

donde  $J_{R_{ij}} = \left. \frac{\partial R_i}{\partial u_j} \right|_u$ , osea

$$R_i(u^*) \approx R_i(u) + \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial R_i}{\partial u_j} \right|_u (u_j^* - u_j), \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Escribiendo en forma vectorial

$$R(u) \approx R(u) + J_R(u^* - u).$$

Desde que  $u^*$  es solución de (1.2), obtenemos

$$0 \approx R(u) + J_R(u^* - u). \quad (1.3)$$

Como podemos notar la expresión (1.3) se puede resolver en un procedimiento de dos pasos:

1. Resolver  $J_R \delta u = -R(u)$  con respecto al vector  $\delta u$ , y
2. actualizar  $u^* = u + \delta u$ .

De (1.3) tenemos

$$\begin{aligned} -R(u) &\approx J_R(u^* - u) \\ -R(u)J_R^{-1}(u) &\approx (u^* - u) \\ u^* &\approx u - J_R^{-1}(u)R(u). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Denotamos por  $u = u^{(n)}$ , es decir conocemos la iteración  $n$ -ésima y queremos determinar la iteración  $n + 1$ -ésima, entonces

$$u^* \approx u^{(n)} - J_R^{-1}(u^{(n)})R(u^{(n)}). \tag{1.5}$$

Vemos que (1.5) es una aproximación a la solución  $u^*$ , luego la denotamos por

$$u^{(n+1)} \approx u^{(n)} - J_R^{-1}(u^{(n)})R(u^{(n)}) \tag{1.6}$$

luego, (1.6) es la expresión iterativa del método de Newton para funciones de varias variables.

Hemos asumido que  $u$  es una estimación suficientemente buena a la solución  $u^*$ , además que la matriz jacobiana  $J_R$  es invertible. Bajo esas condiciones podemos esperar que el método de Newton converga cuadráticamente, sin embargo esto se puede garantizar gracias al siguiente teorema:

*Teorema 1.*  $R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función de clase  $C^1$  en un conjunto convexo abierto  $D$  de  $\mathbb{R}^n$  que contiene  $u^*$ . Supongamos que  $J_R^{-1}(u^*)$  existe y además existen constantes positivas  $M$ ,  $C$  y  $L$ , tal que,  $\|J_R^{-1}(u^*)\| \leq C$  y

$$\|J_R(w) - J_R(v)\| \leq L \|w - v\| \quad w, v \in B(u^*, M).$$

Entonces, existe  $r > 0$  tal que, para cualquier  $u^{(0)} \in B(u^*, r)$ , la sucesión (1.6) está únicamente definida y converge a  $u^*$  con

$$\|u^{(n+1)} - u^*\| \leq CL \|u^{(n)} - u^*\|^2. \tag{1.7}$$

*Demostración.* Vamos a proceder por inducción sobre  $n$ . Verifiquemos (1.7) y además que  $u^{(n+1)} \in B(u^*, r)$ . Empezamos probando que para cualquier  $u^{(0)} \in B(u^*, r)$ , la matriz inversa  $J_R^{-1}(u^{(0)})$  existe.

En efecto, para cualquier  $u^0 \in B(u^*, r)$  tenemos:

$$\begin{aligned}
\|I - J_R^{-1}(u^*)J_R(u^{(0)})\| &= \|J_R^{-1}(u^*)J_R(u^*) - J_R^{-1}(u^*)J_R(u^{(0)})\| \\
&= \|J_R^{-1}(u^*)(J_R(u^*) - J_R(u^{(0)}))\| \\
&\leq \|J_R^{-1}(u^*)\| \|J_R(u^*) - J_R(u^{(0)})\| \\
&\leq C \|J_R(u^*) - J_R(u^{(0)})\| \\
&\leq CL \|u^* - u^{(0)}\| \\
&\leq CLr
\end{aligned}$$

Ahora, mostraremos que el radio espectral de la matriz  $I - J_R^{-1}(u^*)J_R(u^{(0)})$  es menor que 1.

Sea  $r = \min\{M, \frac{1}{2CL}\}$  y por definición de radio espectral  $\rho(A) = \inf_{\|x\|=1} \|Ax\|$  (ver definición 3 de la sección 1.2) tenemos:

$$\begin{aligned}
\|I - J_R^{-1}(u^*)J_R(u^{(0)})\| &\leq CL \frac{1}{2CL} = \frac{1}{2} \\
\rho(I - J_R^{-1}(u^*)J_R(u^{(0)})) &\leq \|I - J_R^{-1}(u^*)J_R(u^{(0)})\| \leq \frac{1}{2},
\end{aligned} \tag{1.8}$$

usando el teorema 2 de la sección 1.2,  $(I - (I - J_R^{-1}(u^*)J_R(u^{(0)})))$  es invertible, es decir, existe  $(J_R^{-1}(u^*)J_R(u^{(0)}))^{-1}$ , además se cumple, también por el teorema mencionado, que

$$\|(J_R^{-1}(u^*)J_R(u^{(0)}))^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|I - J_R^{-1}(u^*)J_R(u^{(0)})\|} \tag{1.9}$$

así, existe  $r = \frac{1}{2CL} > 0$  tal que para cualquier  $u^{(0)} \in B(u^*, r)$  existe la inversa de  $J_R(u^{(0)})$ .

Ahora probaremos que para cualquier  $u^{(0)} \in B(u^*, r)$  tenemos que la sucesión  $u^{(n)}$  generada por el método de Newton converge a  $u^*$ .

Observamos de (1.8) que

$$\begin{aligned}
1 - \|I - J_R^{-1}(u^*)J_R(u^{(0)})\| &\geq \frac{1}{2} \\
\frac{1}{1 - \|I - J_R^{-1}(u^*)J_R(u^{(0)})\|} &\leq 2 \\
\frac{\|J_R^{-1}(u^*)\|}{1 - \|I - J_R^{-1}(u^*)J_R(u^{(0)})\|} &\leq 2\|J_R^{-1}(u^*)\| \leq 2C.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Como

$$\begin{aligned} J_R^{-1}(u^{(0)}) &= J_R^{-1}(u^{(0)})J_R(u^*)J_R^{-1}(u^*) \\ &= (J_R^{-1}(u^*)J_R(u^{(0)}))^{-1}J_R^{-1}(u^*) \end{aligned}$$

entonces de (1.9) y (1.10) obtenemos

$$\begin{aligned} \|J_R^{-1}(u^{(0)})\| &= \|(J_R^{-1}(u^*)J_R(u^{(0)}))^{-1}J_R^{-1}(u^*)\| \\ &\leq \|(J_R^{-1}(u^*)J_R(u^{(0)}))^{-1}\|\|J_R^{-1}(u^*)\| \\ &\leq 2C \end{aligned} \tag{1.11}$$

en consecuencia, de la sucesión generada por el método de Newton (1.6),  $u^{(1)}$  está bien definida y

$$u^{(1)} = u^{(0)} - J_R^{-1}(u^{(0)})[R(u^{(0)}) - R(u^*)]$$

luego,

$$\begin{aligned} u^{(1)} - u^* &= u^{(0)} - u^* - J_R^{-1}(u^{(0)})[R(u^{(0)}) - R(u^*)] \\ &= J_R^{-1}(u^{(0)})[J_R(u^{(0)})(u^{(0)} - u^*) + R(u^*) - R(u^{(0)})]. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Escribimos el polinomio de Taylor de  $R$  alrededor de  $u^{(0)}$  y tenemos

$$R(u^*) = R(u^{(0)}) + J_R(u^{(0)})(u^* - u^{(0)}) + r(u^* - u^{(0)}) \tag{1.13}$$

donde  $r(u^* - u^{(0)})$  es el resto y como  $R$  es de clase  $C^1$  se cumple que

$$\lim_{u^{(0)} \rightarrow u^*} \frac{r(u^* - u^{(0)})}{\|u^* - u^{(0)}\|^2} = 0$$

por definición de límite, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $0 < \|u^* - u^{(0)}\| < \delta$ , entonces

$$\|r(u^* - u^{(0)})\| \leq \epsilon \|u^* - u^{(0)}\|^2. \tag{1.14}$$



Así, de (1.12) tenemos

$$\begin{aligned}\|u^{(1)} - u^*\| &= \|J_R^{-1}(u^{(0)})[R(u^{(*)}) - R(u^{(0)}) - J_R(u^{(0)})(u^{(*)} - u^{(0)})]\| \\ &\leq \|J_R^{-1}(u^{(0)})\| \|R(u^{(*)}) - R(u^{(0)}) - J_R(u^{(0)})(u^{(*)} - u^{(0)})\|\end{aligned}\quad (1.15)$$

usamos (1.11), (1.13) y (1.14) en la desigualdad (1.15) obtenemos

$$\|u^{(1)} - u^*\| \leq 2C\|r(u^* - u^{(0)})\| \leq 2C\epsilon\|u^* - u^{(0)}\|^2.$$

Tomando  $\epsilon = \frac{L}{2} > 0$  obtenemos

$$\|u^{(1)} - u^*\| \leq CL\|u^* - u^{(0)}\|^2.$$

Esto prueba la relación (1.7) para el caso  $n = 0$ . Por otro lado, desde que  $u^{(0)} \in B(u^*; r)$ , entonces

$$\|u^* - u^{(0)}\| \leq \frac{1}{2CL}$$

de donde

$$\begin{aligned}\|u^{(1)} - u^*\| &\leq CL\|u^* - u^{(0)}\| \|u^* - u^{(0)}\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|u^* - u^{(0)}\| \\ &\leq \frac{1}{2}r\end{aligned}$$

así aseguramos que  $u^{(1)} \in B(u^*; r)$ .

Asumiendo que el teorema es válido para  $n$  probaremos de modo similar para  $n + 1$ .

De (1.6) tenemos

$$\begin{aligned}u^{(n+1)} &= u^{(n)} - J_R^{-1}(u^{(n)})R(u^{(n)}) \\ u^{(n+1)} - u^* &= u^{(n)} - u^* - J_R^{-1}(u^{(n)})[R(u^{(n)}) - R(u^*)] \\ u^{(n+1)} - u^* &= J_R^{-1}(u^{(n)})[-J_R(u^{(n)})(u^* - u^{(n)}) + R(u^*) - R(u^{(n)})] \\ \|u^{(n+1)} - u^*\| &\leq \|J_R^{-1}(u^{(n)})\| \|r(u^* - u^{(n)})\| \\ &\leq 2C\epsilon\|u^* - u^{(n)}\|^2.\end{aligned}$$

Nuevamente tomamos  $\epsilon = \frac{L}{2}$ , obtenemos

$$\|u^{(n+1)} - u^*\| \leq CL\|u^* - u^{(n)}\|^2.$$

Desde que  $u^{(n)} \in B(u^*, r)$ , por ser hipótesis inductiva, tenemos

$$\begin{aligned} \|u^{(n+1)} - u^*\| &\leq CL\|u^* - u^{(n)}\|\|u^* - u^{(n)}\| \\ &\leq CLr\|u^* - u^{(n)}\| \\ &\leq CL\frac{1}{2CL}\|u^* - u^{(n)}\| \\ &\leq \frac{1}{2}r \end{aligned}$$

entonces,  $u^{(n+1)} \in B(u^*, \frac{1}{2}r) \subset B(u^*, r)$ , lo que finaliza la prueba.  $\square$

*Observación.* El teorema anterior nos asegura que el método de Newton converge cuadráticamente solo si  $u^{(0)}$  es lo suficientemente próximo a la solución  $u^*$  y si la matriz jacobiana es no singular.

### 1.3.1. Relajación

Una iteración en el método de Newton consiste en resolver (1.2), pero a veces los problemas de convergencia surgen porque la nueva solución  $u$  de (1.2) está lejos de la solución previamente calculada. Por esto es necesario usar una actualización de la forma

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + \alpha \delta u^{(n)} \quad \text{con } 0 < \alpha < 1$$

donde  $\alpha$  se conoce como *parámetro de relajación* y  $\alpha < 1$  para poder prevenir iteraciones divergentes.

### 1.3.2. Criterios de parada

Como criterio de parada tenemos el residuo absoluto en la norma euclidiana

$$\|R(u)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n R_i^2} \leq \varepsilon$$

es decir,

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n |u_i^{(n+1)} - u_i^{(n)}|^2}{\sum_{i=1}^n |u_i^{(n)}|^2}} \leq \varepsilon.$$

### 1.3.3. Ejemplo de aplicación

Consideremos el siguiente sistema no lineal

$$\begin{cases} e^x - e^y = 0, \\ \ln(1 + x + y) = 0. \end{cases}$$

El sistema anterior podemos resolverlo analíticamente. De la primera ecuación tenemos  $x = y$  por lo tanto la segunda ecuación se reduce a  $\ln(1 + x + y) = 0$ , entonces  $x = 0$  y así  $y = 0$ . Con esta solución exacta verificamos las propiedades del método de Newton aplicado a este sistema.

Al elegir como punto inicial  $x_0 = y_0 = \frac{1}{2}$  obtenemos los siguientes resultados:

$k$	$x_k$	$y_k$
0	0.5	0.5
1	-0.193147	-0.193147
2	-0.043329	-0.043329
3	-0.001934	-0.001934
4	-0.000004	-0.000004

Notamos que el método de Newton ofrece una convergencia rápida hacia la solución  $x = 0$ ,  $y = 0$ .

## 1.4. Algunos resultados en análisis funcional

### 1.4.1. Espacios $L^p$

Consideremos  $\Omega$  un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  con la medida de Lebesgue.

**Definición 5.** El conjunto de funciones Lebesgue-integrables de  $\Omega$  en  $\mathbb{R}$  es denotado por  $L^1(\Omega)$ . Para  $f \in L^1(\Omega)$

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |f| d\mu.$$

**Definición 6.** Sea  $1 \leq p < \infty$ , y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función medible. La función  $f$  pertenece a  $L^p(\Omega)$  si  $|f|^p$  es Lebesgue integrable sobre  $\Omega$ , es decir, si  $|f|^p \in L^1(\Omega)$ . Para  $f \in L^p(\Omega)$  definimos la norma por

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Para  $p = \infty$ ,  $L^\infty(\Omega)$  definimos

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ medible y } |f(x)| \leq M \text{ c.t.p. en } \Omega \text{ para alguna constante } M\},$$

su norma está dada por

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{M > 0; |f(x)| \leq M \text{ c.t.p. en } \Omega\}.$$

**Definición 7.** Sea  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  un conjunto medible y  $1 \leq p \leq \infty$ . Entonces definimos el conjunto de las funciones localmente integrables:

$$L^p_{loc}(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f\chi_K \in L^p(\Omega) \text{ para cada conjunto compacto } K \subset \Omega\},$$

donde  $\chi_K$  denota la función característica del conjunto  $K$ .

**Proposición 1** (Desigualdad de Hölder). Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto medible,  $1 \leq p, q \leq \infty$  tal que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , entonces para todo  $f \in L^p(\Omega)$ ,  $g \in L^q(\Omega)$

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Si  $p = \infty$ , la proposición anterior se cumple para  $q = 1$ .

**Proposición 2** (Desigualdad de Minkowski). Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto medible,  $1 \leq p \leq \infty$  y  $f, g \in L^p(\Omega)$ . La desigualdad triangular se mantiene

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

En particular,  $f + g \in L^p(\Omega)$ .

**Proposición 3.** Para  $1 \leq p \leq \infty$  y el conjunto medible  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , el espacio  $(L^p(\Omega); \|\cdot\|_{L^p(\Omega)})$  es completo, es decir, es un espacio de Banach.

*Observación.* Si  $p = 2$ , entonces  $\|f\|_{L^2(\Omega)} = \langle f, f \rangle_{L^2(\Omega)}^{1/2}$ , donde  $\langle f, f \rangle_{L^2(\Omega)}$  es el producto interno en  $L^2(\Omega)$  definidos como  $\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} fg dx$ , así  $L^2(\Omega)$  es un espacio de Hilbert.

### 1.4.2. Distribuciones

En esta sección introducimos el concepto de derivada débil. Definimos el espacio  $C^k(\Omega)$  como el espacio de funciones  $k < \infty$  veces diferenciables en  $\Omega$  y el espacio  $C^\infty(\Omega)$  de todas las funciones infinitamente diferenciables.

Sea  $\Omega$  un abierto en  $\mathbb{R}^n$ , definimos el soporte de una función  $f$  como el conjunto

$$\text{supp } \phi = \overline{\{x \in \Omega : \phi(x) \neq 0\}},$$

asimismo, definimos el espacio de funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto en  $\Omega$  denotado por

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \phi \in C^\infty(\Omega), \text{ supp}(\phi) \text{ compacto}\}.$$

Los elementos de  $\mathcal{D}(\Omega)$  son denominados funciones de prueba en  $\Omega$ .

Sea un multi-índice  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  una  $n$ -tupla de enteros no negativos y  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , definimos

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

y por  $D^\alpha$  representamos al operador de derivación de orden  $\alpha$  dado por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

**Definición 8.** Sea  $\alpha$  un multi-índice y  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ . Una función  $\varphi \in L^1_{loc}(\Omega)$  es denominada derivada débil de grado  $\alpha$  de  $u$ , si

$$\int_{\Omega} \varphi \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u \partial^\alpha \varphi \, dx \quad \text{para todo } \phi \in D(\Omega),$$

dicha función será denotada por  $D^\alpha u$ .

### 1.4.3. Espacios de Sobolev

Sea  $u \in L^p(\Omega)$  y asumimos que todas las derivadas débiles  $D^\alpha u$  existen, con  $|\alpha| \leq m$ , donde  $m$  es un entero no negativo. Definimos el espacio de Sobolev

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\}$$

donde  $1 \leq p \leq \infty$ , cuyas normas están definidas como

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

**Proposición 4.** Los espacios  $W^{m,p}(\Omega)$  con  $1 \leq p \leq \infty$  son espacios de Banach.

Para el caso  $p = 2$ , el espacio de Sobolev  $W^{m,2}(\Omega)$  es denotado por  $H^m(\Omega)$ , es un espacio de

Hilbert

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\},$$

con un producto escalar

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)},$$

cuya norma está dada por

$$\|u\|_{H^m(\Omega)}^2 = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).$$

Si  $m = 1$  entonces se define el espacio

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); D^1 u \in L^2(\Omega)\},$$

con un producto interno

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)},$$

y norma

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

**Definición 9.** Denotamos por  $W_0^{m,p}(\Omega)$  como la clausura de  $D(\Omega)$  en  $W^{m,p}(\Omega)$ , es decir,

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)},$$

cuando  $p = 2$ , denotamos por  $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$ , es decir

$$H_0^m(\Omega) = \{u \in H^m(\Omega); \text{ para } |\alpha| < m, D^\alpha u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}$$

luego, si  $m = 1$  se define el espacio

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); f = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}.$$

#### 1.4.4. Problemas variacionales abstractos

Para una mejor comprensión de los conceptos que se utilizan en el próximo capítulo, introducimos algunas definiciones, y un teorema fundamental para obtener la existencia y unicidad de soluciones para una amplia gama de problemas variacionales abstractos.

**Definición 10.** Sea  $V$  un espacio de Hilbert, una función de la forma  $a(.,.) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  es bilineal en  $V$  si es lineal en cada una de las componentes.

**Definición 11.** La forma bilineal  $a(.,.)$  es continua en  $V$ , si existe una constante  $C_1 > 0$  tal que

$$|a(u, v)| \leq C_1 \|u\| \|v\|, \quad \text{para todo } u, v \in V.$$

**Definición 12.** La forma bilineal  $a(.,.)$  es coerciva o elíptica en  $V$ , si existe una constante  $C_2 > 0$  tal que

$$|a(u, u)| \geq C_2 \|u\|^2, \quad \text{para todo } u \in V.$$

**Definición 13.** La forma bilineal  $a(.,.)$  es simétrica en  $V$ , si

$$a(u, v) = a(v, u), \quad \text{para todo } u \in V.$$

**Definición 14.** Una función  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  lineal en  $V$ , es continua si existe una constante  $C_3 > 0$  tal que

$$|\langle f, v \rangle| \leq C_3 \|v\|, \quad \text{para todo } v \in V.$$

Se dice que  $f$  es un elemento del dual  $V$  denotado por  $V^*$ .

Dado un  $u \in V$ , y sea  $f_u$  un funcional lineal continuo sobre  $V$  definido por

$$f_u(v) = \langle u, v \rangle.$$

**Teorema 3** (Representación de Riesz). *Cualquier funcional lineal y acotado  $F$  sobre un espacio de Hilbert  $H$  puede ser representado únicamente como*

$$F(v) = \langle u, v \rangle, \quad \text{para algún } u \in V.$$



Además tenemos  $\|F\|_{V^*} = \|u\|_{V^*}$ .

*Demostración.* Ver la prueba en [4]. □

Queremos probar la existencia y unicidad de la solución del problema variacional:

Hallar  $u \in V$  tal que

$$a(u, v) = F(v), \text{ para todo } v \in V, \quad (1.16)$$

donde  $V$  es un espacio de Hilbert,  $F \in V^*$  y  $a(., .)$  es una forma bilineal continua y coerciva, no necesariamente simétrica. La extensión del teorema de la Representación de Riesz a formas bilineales no simétricas es conocido como el teorema de Lax-Milgram. Este teorema garantiza tanto la existencia como la unicidad de la solución de (1.16).

**Teorema 4** (Lax-Milgram). *Dado un espacio de Hilbert  $(V, \langle ., . \rangle)$ , sea  $a(., .)$ , una forma bilineal, continua y coerciva y un funcional lineal  $F \in V^*$ , entonces existe un único  $u \in V$  tal que*

$$a(u, v) = F(v), \quad \text{para todo } v \in V.$$

*Demostración.* Ver la prueba en [4]. □

## Capítulo 2

# Método de elementos finitos unidimensionales: Caso lineal

En este capítulo, presentamos el método de elementos finitos como una herramienta general para la solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con diversas condiciones de frontera. Introducimos la idea básica de reescribir el problema de valor frontera en su forma variacional o débil y luego buscamos una aproximación de la solución de esta ecuación desde el espacio de funciones lineales continuas por partes [17], y cómo las diversas condiciones de frontera influyen en el sistema lineal obtenido [10].

### 2.1. Espacio de polinomios lineales

Sea  $I = [a, b]$  un intervalo de la recta real, definimos  $P_1(I)$  como el espacio de funciones lineales sobre  $I$ , es decir,

$$P_1(I) = \{v : v(x) = c_1x + c_2, \ x \in I, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Así,  $P_1(I)$  contiene todas las funciones de la forma  $v(x) = c_1x + c_2$  sobre  $I$ . La función  $v$  puede ser determinada únicamente por sus valores en los puntos extremos  $a$  y  $b$  de  $I$ ,  $\alpha_1 = v(a)$ ,  $\alpha_2 = v(b)$ , como se ve en la Figura 2.1. En efecto, sean  $\alpha_1 = v(a)$  y  $\alpha_2 = v(b)$  y la función lineal  $v(x) = c_1x + c_2$ ,

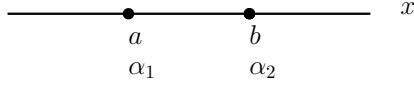


Figura 2.1: Puntos extremos y sus variables nodales respectivamente.

tomamos  $x = a$  y  $x = b$  y obtenemos el siguiente sistema lineal:

$$\alpha_1 = v(a) = c_1 a + c_2, \quad (2.1)$$

$$\alpha_2 = v(b) = c_1 b + c_2, \quad (2.2)$$

donde

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}.$$

Como  $\det\left(\begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{bmatrix}\right) = b - a > 0$ , existe una única solución para las ecuaciones (2.1) y (2.2) para cualquier  $c_1$  y  $c_2$ . Así hay exactamente una única función  $v$  en  $P_1(I)$  que tiene como *valores nodales* a  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  en  $a$  y  $b$  respectivamente.

Vamos a expresar  $v$  en términos de las variables nodales  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , para esto resolvemos el sistema lineal conformado por las ecuaciones (2.1) y (2.2):

$$c_1 = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{b - a} \quad \text{y} \quad c_2 = \frac{\alpha_2 a - \alpha_1 b}{b - a}.$$

Entonces,

$$v(x) = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{b - a} x + \frac{\alpha_2 a - \alpha_1 b}{b - a},$$

reordenamos

$$v(x) = \frac{b - x}{b - a} \alpha_1 + \frac{x - a}{b - a} \alpha_2,$$

denotamos por

$$\lambda_1(x) = \frac{b - x}{b - a},$$

$$\lambda_2(x) = \frac{x - a}{b - a},$$

luego vemos que  $v$  se puede expresar como

$$v(x) = \alpha_1 \lambda_1(x) + \alpha_2 \lambda_2(x),$$

entonces, cualquier función en  $P_1(I)$  puede ser expresada como la combinación lineal de  $\lambda_1(x)$  y  $\lambda_2(x)$  con  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  como coeficientes. Esto nos permite introducir una base  $\{\lambda_1(x), \lambda_2(x)\}$  para  $P_1(I)$  con la propiedad, para  $i, j = 1, 2, \dots, n+1$

$$\lambda_j(x_i) = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j. \end{cases}$$

Esto establece que  $v$  debe ser igual a sus correspondientes variables nodales en cada nodo, es decir,

$$v(a) = \alpha_1 \lambda_1(a) + \alpha_2 \lambda_2(a) = \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 0 = \alpha_1$$

$$v(b) = \alpha_1 \lambda_1(b) + \alpha_2 \lambda_2(b) = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 1 = \alpha_2.$$

## 2.2. Funciones de base

### 2.2.1. Espacio de las funciones lineales continuas por partes

Dado el intervalo  $I = [0, L]$  y los  $n+1$  puntos nodales  $\{x_i\}_{i=1}^{n+1}$ , definimos una partición ordenada de  $I$  en  $n$  subintervalos, no necesariamente uniformes

$$0 = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < x_{n+1} = L,$$

con  $I_i = x_i - x_{i-1}$  y el tamaño de paso  $h_i = |x_i - x_{i-1}|$  para  $i = 2, 3, \dots, n+1$ . Luego, sobre toda la partición definimos el espacio

$$V_h = \{v : v \in C([0, L]), v|_{I_i} \in P_1(I_i), 2 \leq i \leq n+1\} \quad (2.3)$$

Notamos por la construcción que las funciones en  $V_h$  son lineales por tramos, es decir, son lineales para cada  $I_i$  y continuas en todo  $I$ , como se muestra en la Figura 2.2.

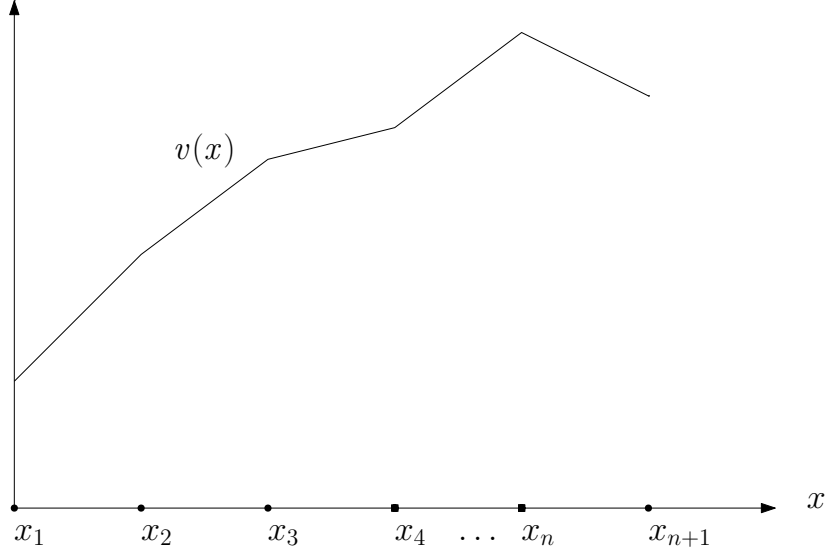


Figura 2.2: Función lineal continua por partes. Tomado de [17].

Cualquier función  $v \in V_h$  está únicamente determinada por sus valores nodales  $\{v(x_i)\}_{i=1}^{n+1}$  y viceversa.

Definimos  $\phi_i \in V_h$  para  $i = 1, 2, \dots, n+1$  como la función lineal por partes, satisfaciendo

$$\phi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n+1. \quad (2.4)$$

Luego, cada  $v \in V_h$  satisface

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n+1} v(x_i) \phi_i(x).$$

En efecto, solo necesitamos verificar que  $v$  y  $\sum_{i=1}^{n+1} v(x_i) \phi_i(x)$  tienen los mismos valores nodales, desde que dos funciones lineales por partes son iguales si y solo si estas tienen los mismos valores

nodales, por lo tanto, sustituimos  $x = x_j$  en

$$\sum_{i=1}^{n+1} v(x_i) \phi_i(x_j) = v(x_j) \phi_j(x_j) = v(x_j).$$

Esto muestra que  $v(x) = \sum_{i=1}^{n+1} v(x_i) \phi_i(x)$ . En consecuencia, cada  $v \in V_h$  puede expresarse como una combinación lineal de  $\{\phi_i\}_{i=1}^{n+1}$ , es decir, este conjunto genera  $V_h$ . Ahora, para probar que  $\{\phi_i\}_{i=1}^{n+1}$  es linealmente independiente, supongamos que  $\sum_{i=1}^{n+1} c_i \phi_i(x) = 0$ , entonces tomamos un  $x_j$  tenemos  $\sum_{i=1}^{n+1} c_i \phi_i(x_j) = c_j = 0$  para  $j = 1, 2, \dots, n+1$ , esto implica que todos los coeficientes  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_{n+1}$  son cero, por lo tanto,  $\{\phi_i\}_{i=1}^{n+1}$  es linealmente independiente.

De este modo hemos introducido una base para  $V_h$ , luego, para cada nodo  $x_i$  definimos la función lineal que satisface (2.4) como sigue:

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{x - x_{i-1}}{h_{i-1}}, & \text{para todo } x \in [x_{i-1}, x_i]; \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} = \frac{x_{i+1} - x}{h_i}, & \text{para todo } x \in [x_i, x_{i+1}]; \\ 0, & \text{para todo } x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases} \quad (2.5)$$

cuya derivada es

$$\frac{d\phi_i(x)}{dx} = \begin{cases} \frac{1}{h_{i-1}}, & \text{para todo } x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle; \\ -\frac{1}{h_i}, & \text{para todo } x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle; \\ 0, & \text{para todo } x \notin \langle x_{i-1}, x_{i+1} \rangle \end{cases}$$

Notamos que las funciones de base son generadas por funciones simples definidas por partes- elemento por elemento- sobre la malla, como se muestra en Figura 2.3.

Estas son lo suficientemente suaves para ser miembros de la clase  $H_0^1(0, L)$  de funciones de

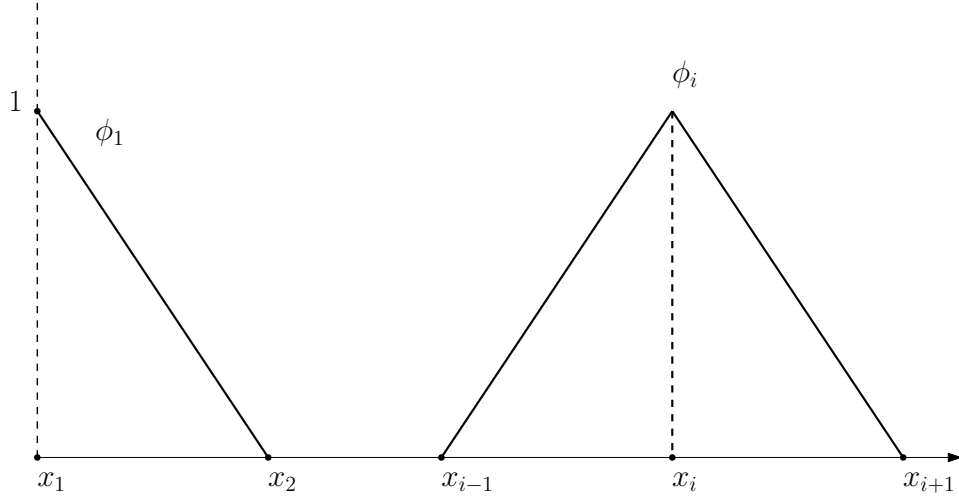


Figura 2.3: Funciones de base lineales por partes. Tomado de [36]

prueba.

Las funciones de base toman un valor unitario en su propio nodo  $x_i$  y son iguales a cero en los otros nodos, por lo tanto, son diferentes de cero en los intervalos  $I_i$  y  $I_{i+1}$  conteniendo el nodo  $x_i$ , es decir,  $\text{supp } \phi_i = I_i \cup I_{i+1}$ , mientras que  $\text{supp } \phi_1 = [x_1, x_2]$  y  $\text{supp } \phi_{n+1} = [x_n, x_{n+1}]$ .

Por construcción, cualquier función  $v \in V_h$  se puede expresar como una combinación lineal de las funciones de base  $\{\phi_i\}_{i=1}^{n+1}$  y sus coeficientes correspondientes  $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n+1}$  con  $\alpha_i = v(i)$ , son los valores nodales de  $v$ . Luego,

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \phi_i(x).$$

## 2.3. Formulación del problema

Consideremos el siguiente problema de valor frontera:

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x), & \text{para todo } x \in [0, 1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

### 2.3.1. Formulaci3n variacional

Empezamos definiendo el espacio de funciones de prueba con soporte compacto en  $\Omega = (0, 1)$ :

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{v \in C^\infty(\Omega); v(0) = v(1) = 0\},$$

o tambi3n denotado como  $C_0^\infty(\Omega)$ .

Multiplicando por  $v \in \mathcal{D}(\Omega)$  e integrando ambos miembros de la ecuaci3n (2.6), tenemos

$$\int_0^1 (-u''v + uv) dx = \int_0^1 f v dx, \quad \text{para todo } v \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (2.7)$$

Integrando por partes el primer t3rmino obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 -u''(x)v(x) dx &= -v(x)u'(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 u'(x)v'(x) dx \\ \int_0^1 -u''(x)v(x) dx &= -v(1)u'(1) + v(0)u'(0) + \int_0^1 u'(x)v'(x) dx. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Aplicando las condiciones de frontera de Dirichlet  $v(0) = v(1) = 0$  a la ecuaci3n (2.8) obtenemos

$$\int_0^1 -u''(x)v(x) dx = \int_0^1 u'(x)v'(x) dx,$$

sustituyendo en (2.7) tenemos

$$\int_0^1 (u'v' + uv) dx = \int_0^1 f v dx, \quad \text{para todo } v \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (2.9)$$

Como  $C_0^\infty(\Omega)$  es denso en  $H_0^1(\Omega)$ , la relaci3n (2.9) tambi3n es v3lida para cualquier  $v \in H_0^1(\Omega)$ .

Ahora, definimos la aplicaci3n  $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$a(u, v) = \int_0^1 (u'v' + uv) dx, \quad \text{para todo } u, v \in H_0^1(\Omega) \quad (2.10)$$



y el funcional lineal  $f : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\langle f, v \rangle = \int_0^1 f v \, dx, \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.11)$$

Entonces, la formulación variacional del problema (2.6) está dada por:  
Hallar  $u = u(x) \in H_0^1(\Omega)$  tal que

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle, \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.12)$$

Veamos que  $a$  satisface las condiciones del Teorema de Lax-Milgram.

1.  $a(., .)$  es bilineal y simétrica.

Dadas  $u, v, w \in H_0^1(\Omega)$  y de (2.10) tenemos:

$$\begin{aligned} a(u + v, w) &= \int_0^1 [(u + v)' w' + (u + v) w] \, dx \\ &= \int_0^1 (u' w' + v' w' + u w + v w) \, dx \\ &= \int_0^1 (u' w' + u w) \, dx + \int_0^1 (v' w' + v w) \, dx \\ &= a(u, w) + a(v, w) \end{aligned}$$

análogamente,

$$a(u, v + w) = a(u, v) + a(u, w).$$

Probemos la simetría,

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_0^1 (u' v' + u v) \, dx \\ &= \int_0^1 (v' u' + v u) \, dx \\ &= a(v, u). \end{aligned}$$

2.  $a(., .)$  es continua.

Dadas  $u, v \in H_0^1(\Omega)$  tenemos

$$|a(u, v)| = \left| \int_0^1 u'v' \, dx + \int_0^1 uv \, dx \right|$$

por la desigualdad triangular,

$$|a(u, v)| \leq \left| \int_0^1 u'v' \, dx \right| + \left| \int_0^1 uv \, dx \right|$$

por la desigualdad de Hölder obtenemos

$$|a(u, v)| \leq \|u'\|_{L^2(\Omega)} \|v'\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Entonces,

$$|a(u, v)| \leq 2\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

por lo tanto,  $a(., .)$  es continua en  $H_0^1(\Omega)$ .

3.  $a(., .)$  es coerciva.

Tenemos que

$$a(u, u) = \int_0^1 (u')^2 \, dx + \int_0^1 u^2 \, dx = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

Así, hemos probado que  $a(u, v)$  es una forma bilineal, simétrica, continua y coerciva en  $H_0^1(\Omega)$ .

Ahora, con respecto al funcional  $F : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  definido por

$$F(v) = \int_0^1 f v \, dx = \langle f, v \rangle_{L^2([0,1])}, \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

Notamos que como  $H_0^1(\Omega) \subset L^2([0, 1])$  y  $f \in L^2([0, 1])$  es fijo, el funcional  $F$  está bien definido. Vamos a probar que  $F$  es continuo en  $H_0^1(\Omega)$ .

En efecto, sea  $v_n \in H_0^1(\Omega)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $v_n \rightarrow v$  en  $H_0^1(\Omega)$ , luego  $\|v_n - v\|_{H_0^1(\Omega)} \rightarrow 0$

cuando  $n \rightarrow +\infty$ . Como  $\|v\|_{L^2([0,1])} \leq \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$  para todo  $v \in H_0^1(\Omega)$ , entonces tenemos  $\|v_n - v\|_{L^2([0,1])} \leq \|v_n - v\|_{H_0^1(\Omega)}$  para  $n \rightarrow +\infty$ .

Así,  $\|v_n - v\|_{L^2([0,1])} \leq \|v_n - v\|_{H_0^1(\Omega)} \rightarrow 0$  para  $n \rightarrow +\infty$ , es decir,  $v_n \rightarrow v$  en  $L^2([0,1])$ . Por la continuidad del producto interno en  $L^2([0,1])$  tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} F(v_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f, v_n \rangle_{L^2([0,1])} \\ &= \left\langle f, \lim_{n \rightarrow \infty} v_n \right\rangle_{L^2([0,1])} \\ &= \langle f, v \rangle_{L^2([0,1])} \\ &= F(v). \end{aligned}$$

Esto prueba que  $F \in (H_0^1(\Omega))^*$ . Concluimos que el problema (2.12) tiene una única solución en  $H_0^1(\Omega)$ .

## 2.4. Aproximación por el método de elementos finitos

Aproximamos el espacio de soluciones (2.3) por un subespacio de dimensión finita como se muestra a continuación. Definimos:

$$V_{h,0} = \{u_h \in H_0^1(\Omega); u_h|_{I_i} \in P_1(I_i), 2 \leq i \leq n+1, u_h(0) = u_h(1) = 0\}. \quad (2.13)$$

Ahora, buscamos una solución aproximada  $u_h = u_h(x)$  del problema (2.12) en el espacio  $V_{h,0}$ . Hallar  $u_h \in V_{h,0}$  tal que

$$a(u_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle, \quad \text{para todo } v_h \in V_{h,0}, \quad (2.14)$$

donde

$$u_h = \sum_{j=1}^{n+1} u_j \phi_j(x), \quad \phi_j \in V_{h,0} \quad (2.15)$$

es una aproximación de la solución  $u = u(x)$ , llamada *solución aproximada* de  $u$ .

Vemos que para hallar  $u_h \in V_{h,0}$  es necesario determinar los coeficientes  $u_j$ . Sustituyendo  $u_h$

definido en (2.15) en (2.14), se tiene

$$a\left(\sum_{j=1}^{n+1} u_j \phi_j(x), v_h\right) = \langle f, v_h \rangle, \quad \text{para todo } v_h \in V_{h,0}. \quad (2.16)$$

Como  $v_h \in V_{h,0}$ , tomamos en particular  $v_h = \phi_i$  para  $i = 1, 2, 3, \dots, n+1$  y reescribimos (2.16)

$$a\left(\sum_{j=1}^{n+1} u_j \phi_j(x), \phi_i(x)\right) = \langle f, \phi_i(x) \rangle,$$

es decir,

$$\sum_{j=1}^{n+1} a(\phi_i, \phi_j) u_j = \langle f, \phi_i \rangle, \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots, n+1. \quad (2.17)$$

De (2.17) obtenemos el sistema matricial

$$AU = b, \quad (2.18)$$

donde

$$A_{i,j} = a(\phi_i, \phi_j) = \int_0^1 (\phi_i' \phi_j' + \phi_i \phi_j) dx, \quad (2.19)$$

$$b_i = \int_0^1 f \phi_i dx. \quad (2.20)$$

siendo  $A = [A_{i,j}]$  una matriz de orden  $(n+1) \times (n+1)$ , denominada *matriz de rigidez global* y  $b = [b_i]$  es un vector de orden  $(n+1) \times 1$  denominado *vector de carga*.

### 2.4.1. Elementos y nodos

El problema modelo (2.6), está definido sobre el dominio  $0 < x < 1$ . Particionamos este dominio en  $n$  subintervalos de diferente tamaño  $h_{k+1} = x_{k+1} - x_k$ . Estos intervalos son las regiones  $x_k \leq x \leq x_{k+1}$ , para  $k = 1, \dots, n$ . A dichos intervalos se les denomina *elementos* y a los puntos  $x_i$  que están en los extremos de cada elemento se les denomina *nodos*. Cuando decimos elemento  $k$ , el cual denotaremos como  $\Omega_k$ , nos referimos al elemento que ocupa  $x_k \leq x \leq x_{k+1}$ , para  $k = 1, \dots, n$ . Los

elementos y los nodos ordenados en forma creciente en conjunto se conocen como malla (ver Fig. 2.4).

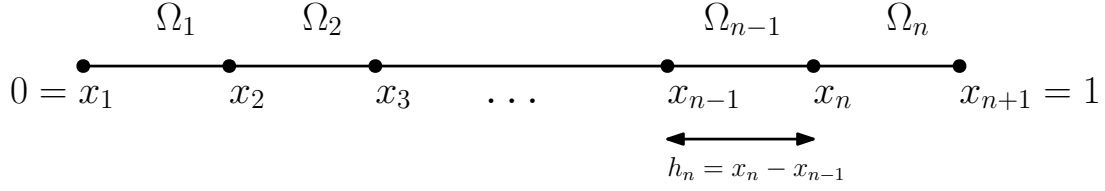


Figura 2.4: Malla uniforme con  $n$  elementos y  $n + 1$  nodos.

### 2.4.2. Funciones de base locales

Las funciones de base globales definidas en (2.5) son ahora redefinidas a través de una aplicación entre un elemento  $\Omega_k$  (arbitrario) de la malla y un elemento de referencia.

Sea el elemento  $\Omega_k$  de la malla, esto es:  $x_k \leq x \leq x_{k+1}$  y la aplicación  $X = x - x_k$ , mapeamos a un elemento de referencia  $0 \leq X \leq h_{k+1}$ , pues si  $x = x_k$  entonces  $X = 0$  y si  $x = x_{k+1}$  entonces  $X = h_{k+1}$  (ver Fig. 2.5).

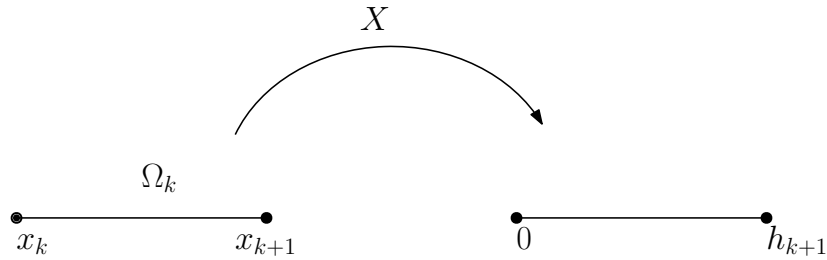


Figura 2.5: Mapeado de un elemento  $\Omega_k$  a un elemento de referencia  $[0, h_{k+1}]$ .

Sabemos que la función de base global está dada en (2.5), haciendo el cambio de variable respectivo (ver Fig. 2.6).

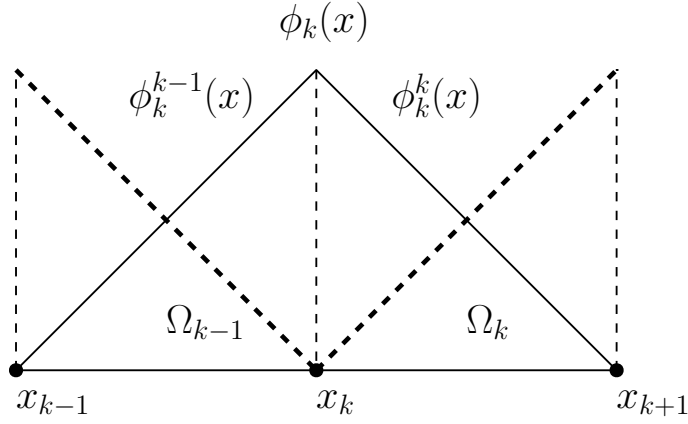


Figura 2.6: Función de base global  $\phi_k(x)$

Elemento  $\Omega_{k-1} : x_{k-1} \leq x \leq x_k$ :

$$\phi_k^{k-1}(x) = \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}},$$

como  $X = x - x_{k-1}$ , se tiene

$$\phi_k^{k-1}(X) = \frac{X + x_{k-1} - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} = \frac{X}{x_k - x_{k-1}} = \frac{X}{h_k}.$$

Elemento  $\Omega_k : x_k \leq x \leq x_{k+1}$ :

$$\phi_k^k(x) = \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k},$$

como  $X = x - x_k$ , entonces

$$\phi_k^k(X) = \frac{x_{k+1} - (X + x_k)}{x_{k+1} - x_k} = \frac{x_{k+1} - x_k - X}{x_{k+1} - x_k} = 1 - \frac{X}{h_{k+1}}.$$

Por lo tanto, la función de base global  $\phi_k(x)$  expresada en términos de la nueva variable, se define como

$$\phi_k(X) = \begin{cases} \phi_k^{k-1}(X), & \text{para todo } X \in [0, h_k] = [x_{k-1}, x_k] \\ \phi_k^k(X), & \text{para todo } X \in [0, h_{k+1}] = [x_k, x_{k+1}] \end{cases}$$

Vemos que sobre el elemento  $\Omega_k$  tenemos las funciones de base globales  $\phi_k$  y  $\phi_{k+1}$ . Ahora, sobre el intervalo local  $[0, h_{k+1}]$  del elemento  $\Omega_k$ , definimos las funciones de base locales (ver Fig. 2.7).

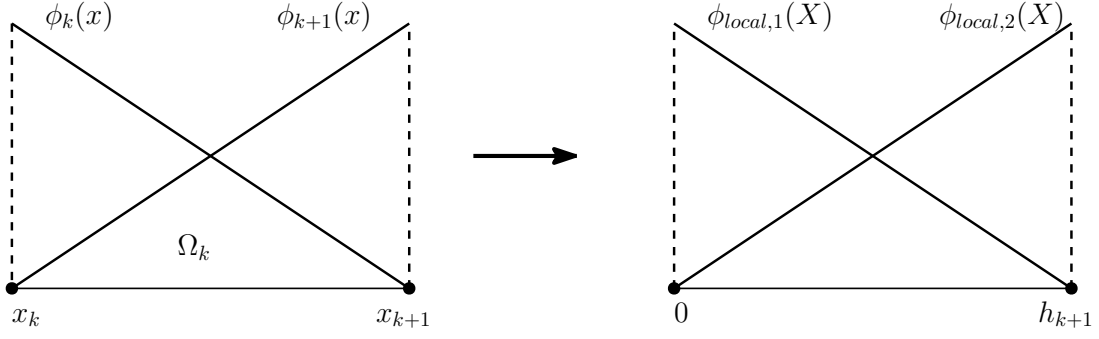


Figura 2.7: Funciones de base locales.

Sea

$$\phi_k(x) = \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k}$$

luego,

$$\phi_k(X) = 1 - \frac{X}{h_{k+1}},$$

a la cual denotaremos por

$$\phi_{local,1}(X) = 1 - \frac{X}{h_{k+1}}.$$

Análogamente,

$$\phi_{k+1}(x) = \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}$$

luego,

$$\phi_{k+1}(X) = \frac{X}{h_{k+1}},$$

la que denotaremos por

$$\phi_{local,2}(X) = \frac{X}{h_{k+1}}.$$

En conclusión, sobre el elemento  $\Omega_k : x_k \leq x \leq x_{k+1}$  tenemos:

$$\phi_k(X) = \phi_{local,1}(X) = 1 - \frac{X}{h_{k+1}}, \quad 0 \leq X \leq h_{k+1} \quad (2.21)$$

$$\phi_{k+1}(X) = \phi_{local,2}(X) = \frac{X}{h_{k+1}}, \quad 0 \leq X \leq h_{k+1} \quad (2.22)$$

$$\phi_j(X) = 0, \quad 0 \leq X \leq h_{k+1} \text{ con } j \neq k \text{ y } j \neq k+1 \quad (2.23)$$

y sus respectivas derivadas

$$\frac{d\phi_{local,1}(X)}{dX} = -\frac{1}{h_{k+1}}, \quad (2.24)$$

$$\frac{d\phi_{local,2}(X)}{dX} = \frac{1}{h_{k+1}}. \quad (2.25)$$

## 2.5. Matriz de rigidez y vector de carga locales

### 2.5.1. Matriz de rigidez local

De las Figuras 2.8 y 2.9 que se muestran a continuación, vemos que  $\phi_k(x)$  y  $\phi'_k(x)$  son diferentes de cero en los elementos  $\Omega_{k-1}$  y  $\Omega_k$  adyacentes al nodo  $x_k$ ; por otro lado, el producto  $\phi_k(x)\phi_{k+1}(x)$  y el producto de sus derivadas respectivas son diferentes de cero solo en el elemento  $\Omega_k$ . En consecuencia, los productos  $\phi_i\phi_j$  y  $\phi'_i\phi'_j$  son distintos de cero solo en los intervalos donde las funciones de base  $\phi_i$  y  $\phi_j$  se superponen. Luego,  $A_{i,j} = 0$  para aquellos nodos  $i, j$  que no pertenecen al mismo elemento, esto conlleva a que la mayoría de las entradas de la matriz  $A$  sean iguales a cero.

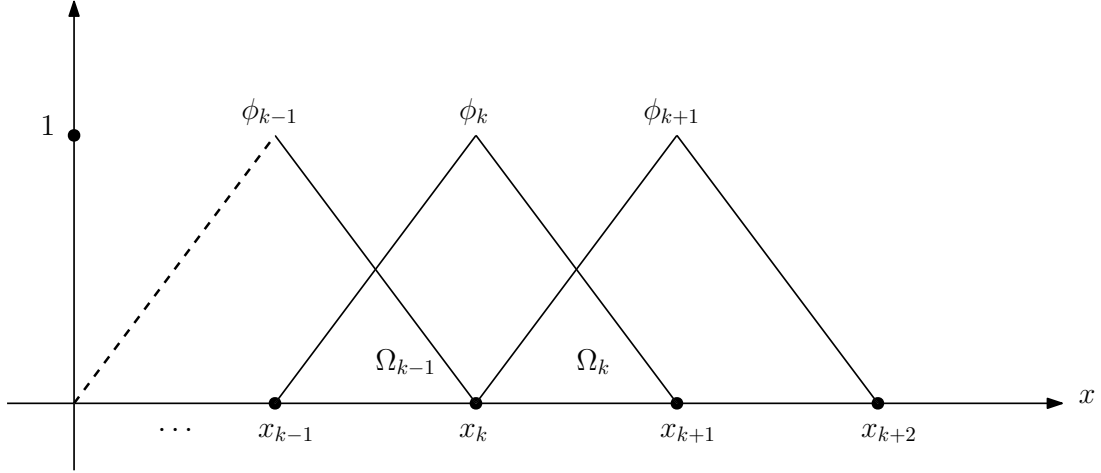


Figura 2.8: Funciones de base globales. Tomado de [3].



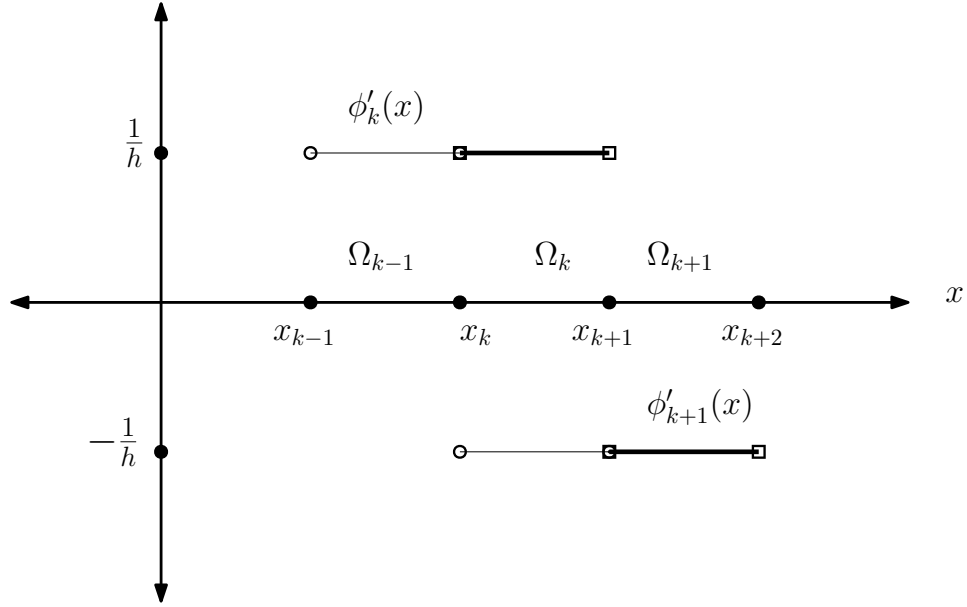


Figura 2.9: Derivadas de las funciones de base globales. Tomado de [3].

La matriz  $A = [A_{i,j}]$  tiene la forma

$$A = \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}$$

donde,  $A_{i,j} \neq 0$  para  $i = j$ ,  $A_{i,j} \neq 0$  para  $|i - j| < 2$  y  $A_{i,j} = 0$  cuando  $|i - j| \geq 2$ . Al restringir la matriz  $A$  a cada elemento finito  $\Omega_k$ , vemos que las únicas entradas diferentes de cero son  $A_{k,k}$ ,  $A_{k,k+1}$ ,  $A_{k+1,k}$ ,  $A_{k+1,k+1}$ , para  $k = 1, 2, \dots, n$ . Entonces, definimos las entradas locales que son denotadas por  $A_{local,1,1}^k$ ,  $A_{local,1,2}^k$ ,  $A_{local,2,1}^k$ ,  $A_{local,2,2}^k$ , dichas entradas están expresadas con las funciones de base locales definidas en (2.21), (2.22) y sus respectivas derivadas definidas en (2.24),

(2.25):

$$A_{k,k} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} (\phi'_k(x)\phi'_k(x) + \phi_k(x)\phi_k(x)) \, dx$$

$$A_{local,1,1}^k = \int_0^{h_{k+1}} (\phi'_{local,1}(X)\phi'_{local,1}(X) + \phi_{local,1}(X)\phi_{local,1}(X)) \, dX$$

Sustituyendo (2.24) y (2.21) en la expresión anterior, obtenemos

$$\begin{aligned} A_{local,1,1}^k &= \int_0^{h_{k+1}} \left[ \left( -\frac{1}{h_{k+1}} \right) \left( -\frac{1}{h_{k+1}} \right) + \left( 1 - \frac{X}{h_{k+1}} \right) \left( 1 - \frac{X}{h_{k+1}} \right) \right] dX \\ &= \int_0^{h_{k+1}} \left[ \left( \frac{1}{h_{k+1}} \right)^2 + \left( 1 - \frac{X}{h_{k+1}} \right)^2 \right] dX \\ &= \int_0^{h_{k+1}} \left[ \frac{1}{h_{k+1}^2} + 1 - \frac{2X}{h_{k+1}} + \frac{X^2}{h_{k+1}^2} \right] dX \\ &= \frac{X}{h_{k+1}^2} \Big|_0^{h_{k+1}} + X \Big|_0^{h_{k+1}} - \frac{X^2}{h_{k+1}} \Big|_0^{h_{k+1}} + \frac{X^3}{3h_{k+1}^2} \Big|_0^{h_{k+1}} dX \\ &= \frac{1}{h_{k+1}} + \frac{h_{k+1}}{3}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

De forma análoga procedemos con las demás entradas

$$A_{k,k+1} = A_{k+1,k} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} (\phi'_k(x)\phi'_{k+1}(x) + \phi_k(x)\phi_{k+1}(x)) \, dx,$$

entonces,

$$\begin{aligned}
A_{local,1,2}^k &= A_{local,2,1}^k \\
&= \int_0^{h_{k+1}} [\phi'_{local,1}(X)\phi'_{local,2}(X) + \phi_{local,1}(X)\phi_{local,2}(X)] \, dX \\
&= \int_0^{h_{k+1}} \left[ \left( -\frac{1}{h_{k+1}} \right) \left( \frac{1}{h_{k+1}} \right) + \left( 1 - \frac{X}{h_{k+1}} \right) \left( \frac{X}{h_{k+1}} \right) \right] \, dX \\
&= \int_0^{h_{k+1}} \left[ -\frac{1}{h_{k+1}^2} + \frac{X}{h_{k+1}} - \frac{X^2}{h_{k+1}^2} \right] \, dX \\
&= -\frac{X}{h_{k+1}^2} \Big|_0^{h_{k+1}} + \frac{X^2}{2h_{k+1}} \Big|_0^{h_{k+1}} - \frac{X^3}{3h_{k+1}^2} \Big|_0^{h_{k+1}} \, dX \\
&= -\frac{1}{h_{k+1}} + \frac{h_{k+1}}{6}.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

y finalmente

$$\begin{aligned}
A_{k+1,k+1} &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} (\phi'_{k+1}(x)\phi'_{k+1}(x) + \phi_{k+1}(x)\phi_{k+1}(x)) \, dx \\
A_{local,2,2}^k &= \int_0^{h_{k+1}} \left[ \left( \frac{1}{h_{k+1}} \right) \left( \frac{1}{h_{k+1}} \right) + \left( \frac{X}{h_{k+1}} \right) \left( \frac{X}{h_{k+1}} \right) \right] \, dX \\
&= \int_0^{h_{k+1}} \left[ \frac{1}{h_{k+1}^2} + \frac{X^2}{h_{k+1}^2} \right] \, dX \\
&= \frac{X}{h_{k+1}^2} \Big|_0^{h_{k+1}} + \frac{X^3}{3h_{k+1}^2} \Big|_0^{h_{k+1}} \\
&= \frac{1}{h_{k+1}} + \frac{h_{k+1}}{3}.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Por lo tanto, definimos la *matriz local* de orden  $2 \times 2$  asociada a cada elemento  $\Omega_k$ :

$$A_{local}^k = \begin{bmatrix} A_{local,1,1}^k & A_{local,1,2}^k \\ A_{local,2,1}^k & A_{local,2,2}^k \end{bmatrix}. \tag{2.29}$$

Al sustituir (2.26), (2.27) y (2.28) en (2.29) se tiene

$$A_{local}^k = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_{k+1}} + \frac{h_{k+1}}{3} & -\frac{1}{h_{k+1}} + \frac{h_{k+1}}{6} \\ -\frac{1}{h_{k+1}} + \frac{h_{k+1}}{6} & \frac{1}{h_{k+1}} + \frac{h_{k+1}}{3} \end{bmatrix}, \tag{2.30}$$

a continuación se muestra en la Tabla 2.1 la relación de las entradas de la matriz local  $A_{local}^k$  y la matriz global  $A$  respectivamente.

Entrada en $A_{local}^k$		Entrada en $A$	
fila	columna	fila	columna
0	0	$k$	$k$
0	1	$k$	$k+1$
1	0	$k+1$	$k$
1	1	$k+1$	$k+1$

Tabla 2.1: Relación entre las entradas de  $A_{local}^k$  y  $A$ .

### 2.5.2. Vector de carga local

Restringimos el vector de carga  $b$  a cada elemento finito  $\Omega_k$ , así las funciones de base que son distintas de cero en  $\Omega_k$  son  $\phi_k$  y  $\phi_{k+1}$ , entonces las entradas distintas de cero son  $b_k$  y  $b_{k+1}$  para  $k = 1, 2, \dots, n$ . Sea,

$$b_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) \phi_k(x) dx,$$

realizamos un cambio de variable, como lo vimos en la sección 2.4.2, obtenemos

$$b_{local,1}^k = \int_0^{h_{k+1}} f(X + x_k) \phi_{local,1}(X) dX. \quad (2.31)$$

De manera similar,

$$b_{k+1} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) \phi_{k+1}(x) dx,$$

realizamos nuevamente un cambio de variable, obtenemos

$$b_{local,2}^k = \int_0^{h_{k+1}} f(X + x_k) \phi_{local,2}(X) dX. \quad (2.32)$$

Aproximamos estas integrales por medio de la cuadratura de Gauss-Legendre de cuatro nodos estudiada en la sección 1.1

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \cong \sum_{i=1}^4 \omega_i f(x_i).$$

Como el intervalo de integración es  $[0, h_{k+1}]$ , realizamos el cambio de variable correspondiente

$$X = \frac{h_{k+1}}{2} + \frac{h_{k+1}}{2} t \quad (2.33)$$

con  $dX = \frac{h_{k+1}}{2} dt$ .

Las funciones de base locales (2.21) y (2.22) las expresamos en función de la nueva variable (2.33)

$$\phi_{local,1}(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \quad (2.34)$$

$$\phi_{local,2}(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t. \quad (2.35)$$

En (2.31) y (2.32) realizamos el cambio de variable (2.33) y a su vez sustituimos (2.34) y (2.35).

$$\begin{aligned} b_{local,1}^k &= \int_0^{h_{k+1}} f\left(\frac{h_{k+1}}{2} + \frac{h_{k+1}}{2}t + x_k\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t\right) \frac{h_{k+1}}{2} dt \\ &= \frac{h_{k+1}}{4} \int_{-1}^1 (1-t) f\left(\frac{h_{k+1}}{2} + \frac{h_{k+1}}{2}t + x_k\right) dt \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} b_{local,2}^k &= \int_0^{h_{k+1}} f\left(\frac{h_{k+1}}{2} + \frac{h_{k+1}}{2}t + x_k\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t\right) \frac{h_{k+1}}{2} dt \\ &= \frac{h_{k+1}}{4} \int_{-1}^1 (1+t) f\left(\frac{h_{k+1}}{2} + \frac{h_{k+1}}{2}t + x_k\right) dt. \end{aligned}$$

Por la cuadratura de Gauss-Legendre se tiene

$$\begin{aligned} b_{local,1}^k &= \frac{h_{k+1}}{4} \sum_{i=1}^4 \omega_i (1-x_i) f\left(\frac{h_{k+1}}{2} + \frac{h_{k+1}}{2}x_i + x_k\right) \\ &= \frac{h_{k+1}}{4} \sum_{i=1}^4 \omega_i (1-x_i) f\left(x_k + \frac{h_{k+1}}{2}(1+x_i)\right). \end{aligned}$$

también

$$\begin{aligned}
b_{local,2}^k &= \frac{h_{k+1}}{4} \sum_{i=1}^4 \omega_i (1 + x_i) f\left(\frac{h_{k+1}}{2} + \frac{h_{k+1}}{2} x_i + x_k\right) \\
&= \frac{h_{k+1}}{4} \sum_{i=1}^4 \omega_i (1 + x_i) f\left(x_k + \frac{h_{k+1}}{2} (1 + x_i)\right).
\end{aligned}$$

Así, el vector de carga local toma de la siguiente forma:

$$b_{local}^k = \begin{bmatrix} b_{local,1}^k \\ b_{local,2}^k \end{bmatrix} = \frac{h_{k+1}}{4} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 \omega_i (1 - x_i) f\left(\frac{h_{k+1}}{2} + \frac{h_{k+1}}{2} x_i + x_k\right) \\ \sum_{i=1}^4 \omega_i (1 + x_i) f\left(x_k + \frac{h_{k+1}}{2} (1 + x_i)\right) \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Entrada en $b_{local}^k$	Entrada en $b$
1	$k$
2	$k + 1$

Tabla 2.2: Relación entre las entradas de  $b_{local}^k$  y  $b$ .

## 2.6. Ensamblaje de la matriz de rigidez y vector de carga globales

Para ensamblar la matriz de rigidez global  $A$ , comenzamos por la entrada de la forma  $A_{k,k}$ , entonces de (2.19), tomamos  $i = j = k$  y obtenemos

$$\begin{aligned}
A_{k,k} &= \int_0^1 (\phi'_k(x) \phi'_k(x) + \phi_k(x) \phi_k(x)) \, dx \\
&= \int_{x_{k-1}}^{x_k} (\phi'_k(x) \phi'_k(x) + \phi_k(x) \phi_k(x)) \, dx + \int_{x_k}^{x_{k+1}} (\phi'_k(x) \phi'_k(x) + \phi_k(x) \phi_k(x)) \, dx.
\end{aligned}$$

De la expresión anterior tenemos dos regiones o elementos que son  $x_{k-1} \leq x \leq x_k$  y  $x_k \leq x \leq x_{k+1}$ , es decir,  $\Omega_{k-1}$  y  $\Omega_k$  respectivamente.

De (2.29) tenemos las matrices locales respecto a los elementos  $\Omega_{k-1}$  y  $\Omega_k$ , y por la Tabla 2.1 obtenemos la relación correspondiente a las entradas de la matriz global  $A$ :

$$A_{local}^{k-1} = \begin{bmatrix} A_{local,1,1}^{k-1} & A_{local,1,2}^{k-1} \\ A_{local,2,1}^{k-1} & A_{local,2,2}^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{k-1,k-1} & A_{k-1,k} \\ A_{k,k-1} & A_{k,k} \end{bmatrix}$$

$$A_{local}^k = \begin{bmatrix} A_{local,1,1}^k & A_{local,1,2}^k \\ A_{local,2,1}^k & A_{local,2,2}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{k,k} & A_{k,k+1} \\ A_{k+1,k} & A_{k+1,k+1} \end{bmatrix}.$$

Podemos notar que,

$$A_{local,2,2}^{k-1} = A_{k,k} = \int_{x_{k-1}}^{x_k} (\phi'_k(x)\phi'_k(x) + \phi_k(x)\phi_k(x)) \, dx$$

$$A_{local,1,1}^k = A_{k,k} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} (\phi'_k(x)\phi'_k(x) + \phi_k(x)\phi_k(x)) \, dx.$$

Entonces, la entrada  $A_{k,k}$  de la matriz global  $A$  puede ser calculada por la siguiente relación

$$A_{k,k} = A_{local,2,2}^{k-1} + A_{local,1,1}^k, \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.37)$$

De forma análoga las entradas  $A_{k,k+1} = A_{k+1,k}$  de la matriz global  $A$  están dadas por

$$\begin{aligned} A_{k,k+1} &= \int_0^1 (\phi'_k(x)\phi'_{k+1}(x) + \phi_k(x)\phi_{k+1}(x)) \, dx \\ &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} (\phi'_k(x)\phi'_{k+1}(x) + \phi_k(x)\phi_{k+1}(x)) \, dx \\ &= A_{local,2,1}^k. \end{aligned} \quad (2.38)$$



Para las entradas  $A_{1,1}$ ,  $A_{n+1,n+1}$  de la matriz global  $A$  tenemos:

$$\begin{aligned}
A_{1,1} &= \int_0^1 (\phi_1'(x)\phi_1'(x) + \phi_1(x)\phi_{n+1}(x)) \, dx \\
&= \int_{x_1}^{x_2} (\phi_1'(x)\phi_1'(x) + \phi_1(x)\phi_1(x)) \, dx \\
&= A_{local,1,1}^1 .
\end{aligned} \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned}
A_{n+1,n+1} &= \int_0^1 (\phi_{n+1}'(x)\phi_{n+1}'(x) + \phi_{n+1}(x)\phi_{n+1}(x)) \, dx \\
&= \int_{x_n}^{x_{n+1}} (\phi_{n+1}'(x)\phi_{n+1}'(x) + \phi_{n+1}(x)\phi_{n+1}(x)) \, dx \\
&= A_{local,2,2}^n .
\end{aligned} \tag{2.40}$$

De (2.37), (2.38), (2.39) y (2.40) obtenemos la matriz global  $A$  que está dada por:

$$\begin{cases} A_{1,1} = A_{local,1,1}^1 \\ A_{k,k} = A_{local,2,2}^{k-1} + A_{local,1,1}^k, & \text{para } k = 2, 3, \dots, n \\ A_{k,k+1} = A_{local,2,1}^k = A_{k+1,k}, & \text{para } k = 1, 2, 3, \dots, n \\ A_{k+1,k+1} = A_{local,2,2}^n. \end{cases}$$

De lo anterior observamos que la matriz global  $A$  es tridiagonal y simétrica :

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_{3,2} & A_{3,3} & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & A_{n,n} & A_{n,n+1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{n+1,n} & A_{n+1,n+1} \end{bmatrix}$$

Por otra parte, calculamos las entradas del vector de carga global  $b$ :

$$b_k = \int_0^1 f(x)\phi_k(x) dx = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\phi_k(x) dx + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\phi_k(x) dx,$$

de la Tabla 2.2 se tiene

$$b_{local}^{k-1} = \begin{bmatrix} b_{local,1}^{k-1} \\ b_{local,2}^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{k-1} \\ b_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\phi_{k-1}(x) dx \\ \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\phi_k(x) dx \end{bmatrix}$$

y

$$b_{local}^k = \begin{bmatrix} b_{local,1}^k \\ b_{local,2}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_k \\ b_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\phi_k(x) dx \\ \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\phi_{k+1}(x) dx \end{bmatrix},$$

entonces

$$b_k = b_{local,1}^{k-1} + b_{local,1}^k, \quad \text{para } k = 2, \dots, n. \quad (2.41)$$

Luego, para  $b_1$  y  $b_{n+1}$  tenemos

$$b_1 = \int_0^1 f(x)\phi_1(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\phi_1(x) dx = b_{local,1}^1, \quad (2.42)$$

$$b_{n+1} = \int_0^1 f(x)\phi_{n+1}(x) dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)\phi_{n+1}(x) dx = b_{local,2}^n. \quad (2.43)$$

De (2.41), (2.42), y (2.43) tenemos el vector de carga global  $b$  está dado por:

$$\begin{cases} b_1 = b_{local,1}^1 \\ b_k = b_{local,1}^{k-1} + b_{local,1}^k, & \text{para } k = 2, 3, \dots, n \\ b_{n+1} = b_{local,2}^n. \end{cases}$$

## 2.7. Modelos unidimensionales

Hasta ahora, lo que se ha obtenido es la matriz global  $A$  y el vector de carga global  $b$  de orden  $(n+1) \times (n+1)$  y  $(n+1) \times 1$ , respectivamente. Sin embargo, en este proceso no se ha aplicado las condiciones de frontera. Ahora veamos dos condiciones de frontera: PVF con condiciones de Dirichlet y PVF con condición mixta y cómo estas condiciones de frontera tienen influencia en la matriz de rigidez, así como en el vector de carga. Para recordar, empezamos subdividiendo el intervalo  $[0, 1]$  en  $n$  elementos, de esta forma obtenemos  $n+1$  nodos,  $x_1 = 0$ ,  $x_{n+1} = 1$  y  $h_{k+1} = x_{k+1} - x_k$ . Para cada nodo  $x_k$  definimos la función de base  $\phi_k$  como en (2.5) y para cada elemento  $[x_k, x_{k+1}] = [0, h_{k+1}]$  las funciones de base locales como las dadas en (2.21) y (2.22).

### Problema 1

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x), & \text{para todo } x \in [0, 1] \\ u(0) = p, & u(1) = q \end{cases} \quad (2.44)$$

En este problema,  $u$  es conocida en  $x_1 = 0$  es decir  $u(x_1) = u(0) = p$ , también en  $x_{n+1} = 1$ ,  $u(x_{n+1}) = u(1) = q$ . Como,

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{n+1} u_j \phi_j(x)$$

entonces,

$$p = u_h(x_1) = \sum_{j=1}^{n+1} u_j \phi_j(x_1) = u_1,$$

$$q = u_h(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} u_j \phi_j(x_{n+1}) = u_{n+1},$$

así, tenemos  $u_1 = p$  y  $u_{n+1} = q$ , por lo tanto, tenemos  $n - 1$ , incógnitas que queremos determinar:  $u_2, u_3, \dots, u_n$ . Del sistema lineal (2.18) debemos asegurar que  $b_1 = p$  y  $b_{n+1} = q$  entonces

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{n,n-1} & A_{n,n} & A_{n,n+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{n+1,n} & A_{n+1,n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \\ u_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \\ b_{n+1} \end{bmatrix}.$$

Entonces, de la primera fila del sistema lineal, tenemos

$$\begin{aligned} A_{1,1}u_1 + A_{1,2}u_2 &= b_1 \\ A_{1,1}u_1 &= b_1 - A_{1,2}u_2, \end{aligned}$$

tomamos  $A_{1,1} = 1, A_{1,2} = 0$  y  $b_1 = p$  la igualdad es verdadera y satisface la condición  $u_1 = p$ .

Para la segunda fila tenemos

$$\begin{aligned} A_{2,1}u_1 + A_{2,2}u_2 + A_{2,3}u_3 &= b_2 \\ A_{2,1}p + A_{2,2}u_2 + A_{2,3}u_3 &= b_2 \\ A_{2,2}u_2 + A_{2,3}u_3 &= b_2 - A_{2,1}u_1. \end{aligned}$$

Para la última fila tenemos

$$\begin{aligned} A_{n+1,n}u_n + A_{n+1,n+1}u_{n+1} &= b_{n+1} \\ A_{n+1,n+1}u_{n+1} &= b_{n+1} - A_{n+1,n}u_n \end{aligned}$$

tomamos  $A_{n+1,n+1} = 1, A_{n+1,n} = 0$  y  $b_{n+1} = q$ , entonces,  $u_{n+1} = q$ .

Para la penúltima fila

$$A_{n,n-1}u_{n-1} + A_{n,n}u_n + A_{n,n+1}u_{n+1} = b_n,$$

como  $u_{n+1} = q$  tenemos

$$A_{n,n-1}u_{n-1} + A_{n,n}u_n = b_n - A_{n,n+1}q.$$

Luego, el sistema lineal  $AU = b$  que satisface las condiciones de frontera de Dirichlet está dado por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_{2,2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{n,n-1} & A_{n,n} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \\ u_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ b_2 - pA_{2,1} \\ \vdots \\ b_n - q_{n,n+1} \\ q \end{bmatrix}$$

donde la solución del sistema es  $U = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, u_{n+1}) = (p, u_2, u_3, \dots, u_n, q)$ .

## Problema 2

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x), & \text{para todo } x \in [0, 1] \\ u'(0) = p, & u(1) = q. \end{cases} \quad (2.45)$$

En este problema la derivada de la solución aproximada es conocida en  $x_1 = 0$ , o sea

$$\frac{du_h}{dx}(x_1) = \frac{du_h}{dx}(0) = p.$$

Además, la solución es conocida en  $x_{n+1} = q$ , es decir  $q = u_h(x_{n+1}) = u_{n+1}$ , entonces tenemos  $n$  incógnitas, esto es  $u_1, u_2, \dots, u_n$ .

Definimos el espacio  $H_0^1(0, 1) = \{v \in L^2(0, 1); v' \in L^2(0, 1), v(1) = 0\}$  y partimos de la ecuación

$$\begin{aligned} \int_0^1 (-u''v + uv) dx &= \int_0^1 f v dx, \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega). \\ -u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 (u'(x)v'(x) + u(x)v(x)) dx &= \int_0^1 f(x)v(x) dx, \end{aligned}$$

como  $v \in H_0^1(\Omega)$ , entonces  $v(1) = 0$  quedando

$$pv(0) + \int_0^1 (u'(x)v'(x) + u(x)v(x)) \, dx = \int_0^1 f(x)v(x) \, dx,$$

$$\int_0^1 (u'(x)v'(x) + u(x)v(x)) \, dx = \int_0^1 f(x)v(x) \, dx - pv(0).$$

La formulación variacional está dada por:

Hallar  $u \in H_0^1(\Omega)$ , tal que

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle - pv(0), \quad \text{para todo } v \in H_0^1(0, 1).$$

Entonces el problema aproximado está dado por:

$$a(u_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle - pv_h(0), \quad \text{para todo } v_h \in V_{h,0}. \quad (2.46)$$

donde

$$V_{h,0} = \{u_h \in H_0^1(\Omega) / u_h|_{I_i} \in P_1(I_i), \, 2 \leq i \leq n+1, u_h(1) = 0\}.$$

Como  $\{\phi_j\}_{j=1}^{n+1}$  es una base para  $V_{h,0}$ , entonces  $u_h = \sum_{j=1}^{n+1} u_j \phi_j(x)$ . Sustituimos en (2.46) y tomamos

$v_h = \phi_i$ , tenemos

$$\sum_{j=1}^{n+1} u_j a(\phi_i, \phi_j) = \langle f, \phi_i \rangle - p\phi_i(0),$$

definimos

$$\begin{aligned} A_{i,j} &= a(\phi_i, \phi_j), \quad \text{para } i, j = 1, 2, \dots, n+1 \\ b_i &= \langle f, \phi_i \rangle - p\phi_i(0), \quad \text{para } i, j = 1, 2, \dots, n+1. \end{aligned}$$

Vemos que la única diferencia para el ensamblaje es el vector de carga  $b$  ya que tiene un término adicional, sea

$$b_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\phi_k(x) dx + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\phi_k(x) dx - p\phi_i(0),$$

$$b_k = b_{local,2}^{k-1} + b_{local,1}^k - p\phi_k(0).$$

Para  $k = 1$

$$b_1 = b_{local,1}^1 - p,$$

para  $k = 2, \dots, n$

$$b_k = b_{local,2}^{k-1} + b_{local,1}^k,$$

para  $k = n + 1$

$$b_{n+1} = b_{local,2}^n.$$

Como debemos garantizar que  $u_h$  satisfaga la condición de frontera de Dirichlet,  $u_h(x_{n+1}) = q$ , procedemos con el mismo razonamiento del problema 1, modificamos algunas entradas de la matriz global  $A$  ensamblada de forma general y el vector de carga  $b$  ensamblado por las relaciones mencionadas anteriormente, esto es

$$\begin{aligned} A_{n+1,n} &= 0 \\ A_{n+1,n+1} &= 1 \\ b_n &= b_n - qA_{n,n+1} \\ b_{n+1} &= q. \end{aligned}$$

Finalmente, el sistema lineal  $AU = b$  toma la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{n,n-1} & A_{n,n} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \\ u_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n - qA_{n,n+1} \\ q \end{bmatrix}$$

## 2.8. Resultados numéricos

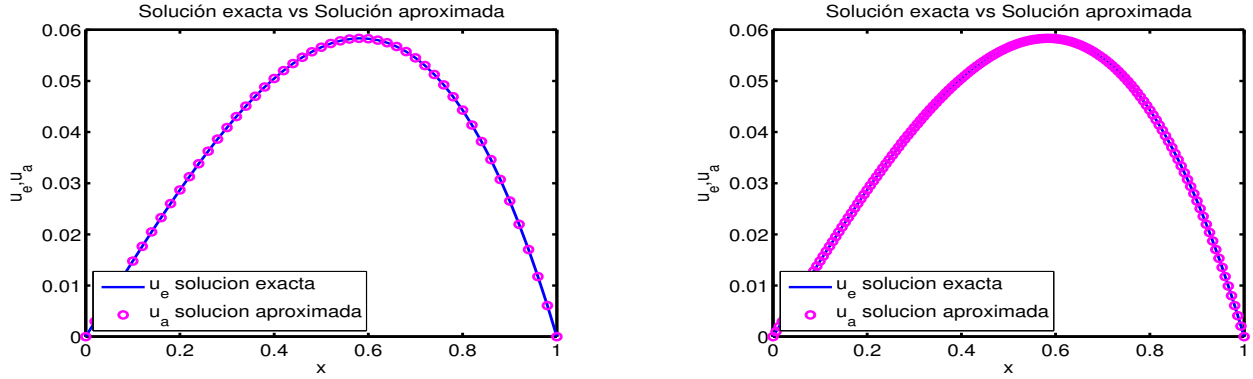
### Problema 1: condiciones de frontera de Dirichlet

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x), & \text{para todo } x \in [0, 1] \\ u(0) = p, & u(1) = q \end{cases}$$

1. Consideremos  $p = q = 0$  y  $f(x) = x$ , cuya solución exacta es

$$u(x) = x + \frac{1}{e - e^{-1}}(e^{-x} - e^x).$$

Los resultados se muestran en las gráficas siguientes:



(a) Considerando 50 elementos en el intervalo  $[0,1]$     (b) Considerando 150 elementos en el intervalo  $[0,1]$

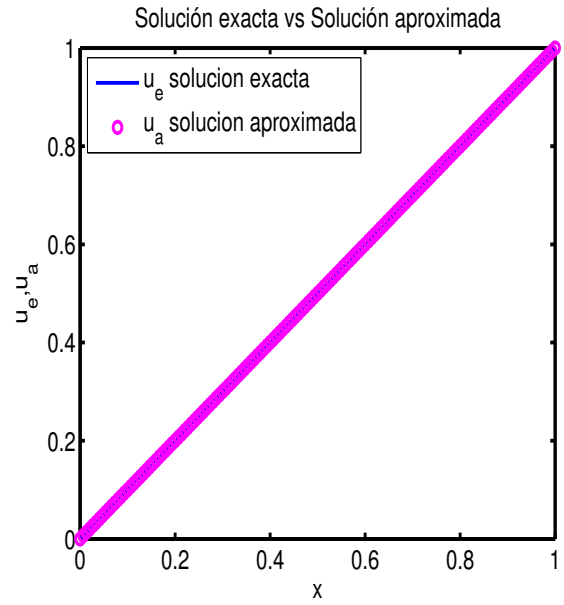
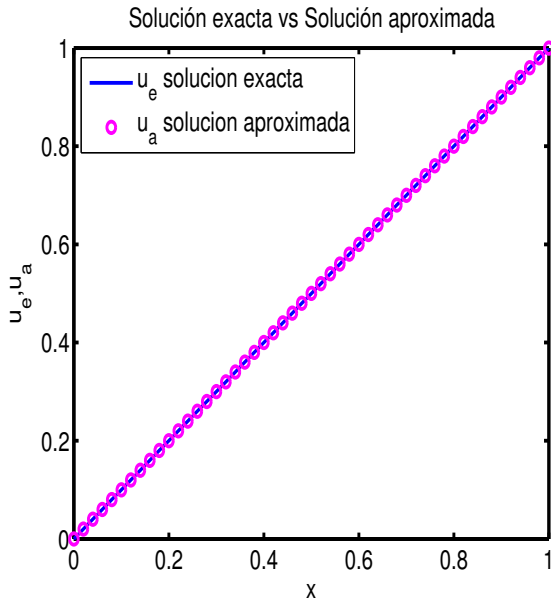
Figura 2.10: Cuando  $p = q = 0$ .

2. Consideremos  $p = 0$ ,  $q = 1$  y  $f(x) = x$ , cuya solución exacta es

$$u(x) = x.$$

Los resultados se muestran en la Figura 2.11.





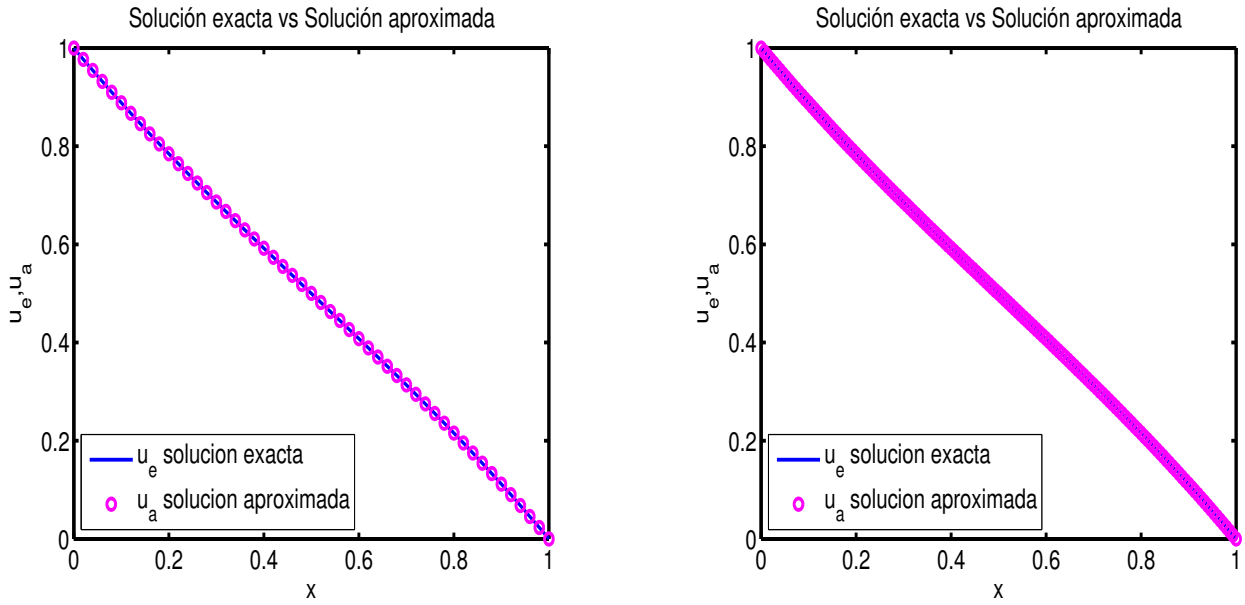
(a) Considerando 50 elementos en el intervalo  $[0,1]$     (b) Considerando 150 elementos en el intervalo  $[0,1]$

Figura 2.11: Cuando  $p = 0$ ,  $q = 1$ .

3. Consideremos  $p = 1$ ,  $q = 0$  y  $f(x) = x$ , cuya solución exacta es

$$u(x) = x + \frac{1}{e - e^{-1}}((e + 1)e^{-x} - (e^{-1} + 1)e^x).$$

Los resultados se muestra en la Figura 2.12.



(a) Considerando 50 elementos en el intervalo  $[0,1]$     (b) Considerando 150 elementos en el intervalo  $[0,1]$

Figura 2.12: Cuando  $p = 1$ ,  $q = 0$ .

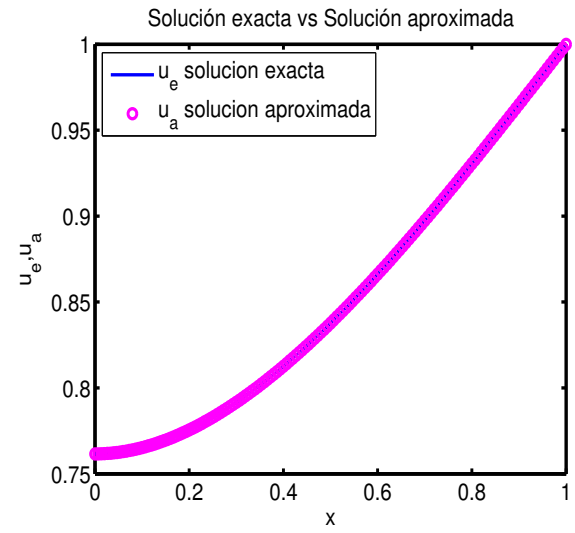
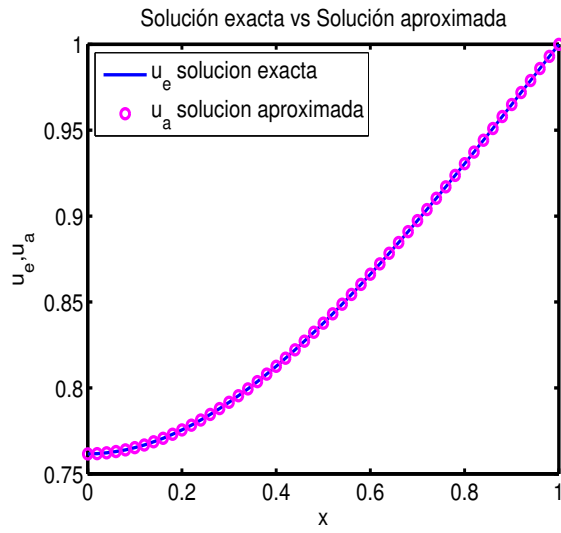
## Problema 2: condiciones de frontera mixtas

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x), & \text{para todo } x \in [0, 1] \\ u'(0) = p, & u(1) = q \end{cases}$$

Consideremos  $p = 0$ ,  $q = 1$  y  $f(x) = x$ , cuya solución exacta es

$$u(x) = x + \frac{1}{e - e^{-1}}(ee^{-x} - e^{-1}e^x).$$

Los resultados se muestran en las gráficas siguientes:



(a) Considerando 50 elementos en el intervalo  $[0,1]$     (b) Considerando 150 elementos en el intervalo  $[0,1]$

Figura 2.13:  $p = 0, q = 1$ .

# Capítulo 3

## Método de elementos finitos unidimensionales: Caso no lineal

En el capítulo anterior hemos visto la aplicación del método de elementos finitos a una ecuación diferencial ordinaria lineal. Motivados por esto, vamos a considerar en el presente capítulo, modelos no lineales, como se puede ver en [36] y [26]. La principal diferencia al aplicar el método de elementos finitos a un problema no lineal es que nos conduce a un sistema algebraico de ecuaciones no lineales; existen diversos métodos iterativos que resuelven dichas ecuaciones, en nuestro caso utilizaremos el método de Newton para su resolución, pues comparado con otros métodos es uno de los más rápidos en converger a la solución [31].

### 3.1. Un problema modelo

Consideremos el siguiente modelo de ecuación diferencial no lineal:

$$-\frac{d}{dx} \left[ a(x, u) \frac{du}{dx} \right] + b(x, u) \frac{du}{dx} + c(x, u)u = f(x), \quad 0 < x < L \quad (3.1)$$

sujeto a las condiciones de frontera de la forma

$$a \frac{du(0)}{dx} = p, \quad (3.2)$$

$$a \frac{du(L)}{dx} = q, \quad (3.3)$$

donde  $u(x)$  denota la variable dependiente a ser determinada, las funciones dadas  $a$ ,  $b$  y  $c$  representan la no linealidad por estar en función de la variable  $u$ , finalmente  $f$  es una función conocida de variable  $x$ . A continuación veamos cómo resolver por el método de elementos finitos la ecuación (3.1) sujeta a las condiciones de frontera (3.2) y (3.3).

## 3.2. Aplicación del método de Newton

Así como hemos visto en el Capítulo 2, el problema variacional general de un modelo lineal, vamos a considerar también problemas variacionales no lineales definidos de la siguiente forma

Hallar  $u \in V$  tal que

$$F(u; v) = 0, \quad \forall v \in V, \quad (3.4)$$

donde  $F : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  es una forma no lineal. Discretizando el problema variacional (3.4), tenemos

hallar  $u_h \in V_h$  tal que

$$F(u_h; v) = 0, \quad \forall v \in V_h. \quad (3.5)$$

Luego, la solución por elementos finitos  $u_h = \sum_{j=1}^M u_j \phi_j$  puede ser calculada resolviendo el sistema no lineal de ecuaciones

$$R(u) = 0 \quad (3.6)$$

donde  $R : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^M$  y

$$R_i(u) = F(u_h; \phi_i), \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (3.7)$$

Vamos a aplicar el método de Newton al sistema (3.7). Como es sabido, empezamos asumiendo que la aproximación  $u^{(k)}$  en la  $k$ -ésima iteración es conocida y deseamos hallar  $u^{(k+1)}$  en la  $(k+1)$ -ésima iteración, entonces expandimos  $R$  en su serie de Taylor alrededor de una solución conocida y

omitimos los términos de orden mayor o igual que 2, así obtenemos

$$R(u) = R(u^{(k)}) + \left( \frac{\partial R}{\partial u^{(k)}} \right) \delta u.$$

Por (3.6), tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= R(u^{(k)}) + \left( \frac{\partial R}{\partial u^{(k)}} \right) \delta u \\ J(u^{(k)}) \cdot \delta u &= -R(u^{(k)}) \end{aligned} \tag{3.8}$$

donde  $J(u)$ , es la matriz jacobiana de  $R$ , cuyas entradas son

$$\begin{aligned} J_{i,j}(u_h) &= \frac{\partial R_i}{\partial u_j}(u) = \frac{\partial F(u_h; \phi_i)}{\partial u_j} \\ &= F'(u_h; \phi_i) \frac{\partial u_h}{\partial u_j} \\ &= F'(u_h; \phi_i) \phi_j \\ &= F'(u_h; \phi_i, \phi_j). \end{aligned}$$

En cada iteración de Newton, debemos evaluar el jacobiano  $J$ , el vector  $R$  y actualizar el vector solución  $u$  por

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} + \delta u, \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{3.9}$$

### 3.3. Formulación variacional

Escribamos el problema (3.1) en la forma débil o variacional. Para este propósito definimos los siguientes espacios de funciones de prueba:

$$H^1(0, L) = \{v; v \in L^2(0, L), \frac{dv}{dx} \in L^2(0, L)\}.$$

Multiplicando la ecuación (3.7) por  $v \in H^1(0, L)$  e integrando sobre el dominio  $[0, L]$ , obtenemos

$$\int_0^L \left[ -\frac{d}{dx} \left[ a(x, u) \frac{d}{dx} \right] + b(x, u) \frac{du}{dx} + c(x, u)u \right] v \, dx = \int_0^L f v \, dx. \quad (3.10)$$

Integrando por partes el primer término

$$\begin{aligned} \int_0^L -\frac{d}{dx} \left[ a(x, u) \frac{d}{dx} \right] v \, dx &= -a(x, u) \frac{du}{dx} v \Big|_0^L + \int_0^L a(x, u) \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} \, dx \\ &= -a(L, u) \frac{du(L)}{dx} v(L) + a(0, u) \frac{du(0)}{dx} v(0) + \int_0^L a(x, u) \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} \, dx. \end{aligned}$$

Usamos la condiciones de frontera de Neumann (3.2), (3.3) y obtenemos

$$\int_0^L -\frac{d}{dx} \left[ a(x, u) \frac{d}{dx} \right] v \, dx = -qv(L) + pv(0) + \int_0^L a(x, u) \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} \, dx.$$

Reemplazando esta última expresión en (3.10) obtenemos:

$$\int_0^L \left( a(x, u) \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + b(x, u) \frac{du}{dx} v + c(x, u)uv \right) \, dx = \int_0^L f v \, dx + qv(L) - pv(0).$$

Escribimos en la forma (3.4)

$$F(u; v) = \int_0^L \left( a(x, u) \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + b(x, u) \frac{du}{dx} v + c(x, u)uv \right) \, dx - \int_0^L f v \, dx - qv(L) + pv(0) = 0,$$

entonces la formulación variacional no lineal del problema (3.1) está dada por hallar  $u \in H^1(0, L)$  tal que

$$F(u; v) = 0, \quad \text{para todo } v \in H^1(0, L). \quad (3.11)$$

### 3.4. Aproximación por el método de elementos finitos

La malla y las funciones de base descritos en el Capítulo 2 son adecuados para este propósito, por lo tanto usaremos una malla de  $M - 1$  elementos,  $M$  nodos y las funciones de base  $\phi_j(x)$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$  descritos en la sección 2.4.

Reemplazamos el espacio continuo  $H^1(0, L)$  por el espacio de las soluciones aproximadas  $V_h$ , este espacio contiene todas las funciones  $u_h(x)$  que pueden ser escritas en la forma

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^M u_j \phi_j(x),$$

donde  $\phi_j(x)$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$  están definidas por las ecuaciones (2.5).

Sustituimos  $u_h$  y  $v = \phi_i$  en la formulación variacional (3.11) y obtenemos su formulación discreta como sigue

hallar  $u_h \in V_h$  tal que

$$F(u_h; \phi_i) = 0, \quad \text{para todo } \phi_i \in V_h. \quad (3.12)$$

Ya que  $F$  es una función no lineal de  $u_h$ , (3.12) da un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales, donde

$$F(u_h; \phi_i) = \int_0^L \left( a(x, u_h) \frac{du_h}{dx} \frac{d\phi_i}{dx} + b(x, u_h) \frac{du_h}{dx} \phi_i + c(x, u_h) u_h \phi_i \right) dx - \int_0^L f \phi_i dx - q \phi_i(L) + p \phi_i(0) = 0, \quad (3.13)$$

para  $i = 1, 2, \dots, M$ .

#### 3.4.1. Ensamblaje de las ecuaciones algebraicas

Restringimos la integral sobre el elemento  $\Omega_r : x_r \leq x \leq x_{r+1}$  y por medio del cambio de variable  $x = X + x_r$  mapeamos este elemento a un elemento de referencia  $0 \leq X \leq h_{r+1}$

$$F(u_h; \phi_i) = \int_0^{h_{r+1}} \left( a(X, u_h) \frac{du_h}{dX} \frac{d\phi_i}{dX} + b(X, u_h) \frac{du_h}{dX} \phi_i + c(X, u_h) u_h \phi_i - f \phi_i \right) dX - q \phi_i(L) + p \phi_i(0) = 0,$$



aquí la solución por elementos finitos sobre el elemento  $\Omega_r$  es

$$u_h(X) = u_r \phi_{local,1}(X) + u_{r+1} \phi_{local,2}(X).$$

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores y tomando  $i = r$ , la función de base  $\phi_r$  es diferente de cero sobre los elementos  $\Omega_{r-1}$ ,  $\Omega_r$ , por lo tanto expresamos  $F$  de la ecuación (3.13) con la notación de las funciones de base locales definidas por las ecuaciones (2.21) y (2.22)

$$F_{local,2}^{r-1} = \int_0^{h_r} \left( a(X, u_h) \frac{du_h}{dX} \frac{d\phi_{local,2}}{dX} + b(X, u_h) \frac{du_h}{dX} \phi_{local,2} + c(X, u_h) u_h \phi_{local,2} - f \phi_{local,2} \right) dX \quad (3.14)$$

$$F_{local,1}^r = \int_0^{h_{r+1}} \left( a(X, u_h) \frac{du_h}{dX} \frac{d\phi_{local,1}}{dX} + b(X, u_h) \frac{du_h}{dX} \phi_{local,1} + c(X, u_h) u_h \phi_{local,1} - f \phi_{local,1} \right) dX. \quad (3.15)$$

Ahora, ensamblamos el sistema no lineal  $F$  como sigue

$$\begin{cases} F_1 = F_{local,1}^1 + p \\ F_r = F_{local,2}^{r-1} + F_{local,1}^r, & \text{para } r = 2, 3, \dots, M-1 \\ F_M = F_{local,2}^{M-1} - q. \end{cases}$$

La aplicación del método de Newton al sistema  $F_i(u_1, u_2, u_3, \dots, u_M) = 0$ , para  $i = 1, 2, \dots, M$  puede ser formulada de acuerdo a (3.8) y (3.9)

$$J_{i,j}(u_1^k, u_2^k, \dots, u_M^k) \delta u_j = -F_i(u_1^k, u_2^k, \dots, u_M^k), \quad (3.16)$$

$$u_j^{k+1} = u_j^k + \delta u_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, M \quad (3.17)$$

donde  $k = 0, 1, 2, \dots$  es el índice de iteración. Para empezar el método de Newton debemos proporcionar una estimación inicial  $u^0 = u_1^0, u_2^0, \dots, u_M^0$ . Cabe resaltar que si tuviéramos condiciones de frontera de tipo Dirichlet, éstas se implementan insertándolas en la estimación inicial  $u^0$  y  $\delta u$  deberá ser cero en la frontera donde se aplican las condiciones de Dirichlet para que la ecuación (3.17) satisfaga las condiciones de frontera correctas.

### 3.5. Cálculo de la matriz jacobiana

Nuestro método numérico para resolver el sistema no lineal de ecuaciones algebraicas requiere la especificación no solo del vector  $F$ , sino también de la matriz jacobiana  $J$ , cuyas entradas están dadas por

$$J_{i,j}(u_h) = \frac{\partial F_i}{\partial u_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, M, \quad (3.18)$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_i}{\partial u_j} &= \frac{\partial}{\partial u_j} \left( \int_0^L \left( a(x, u_h) \frac{du_h}{dx} \frac{d\phi_i}{dx} + b(x, u_h) \frac{du_h}{dx} \phi_i + c(x, u_h) u_h \phi_i \right) dx - \int_0^L f \phi_i dx - q \phi_i(L) + p \phi_i(0) \right) \\ &= \int_0^L \left( \frac{\partial}{\partial u_j} \left[ a(x, u_h) \frac{du_h}{dx} \frac{d\phi_i}{dx} \right] + \frac{\partial}{\partial u_j} \left[ b(x, u_h) \frac{du_h}{dx} \phi_i \right] + \frac{\partial}{\partial u_j} \left[ c(x, u_h) u_h \phi_i \right] \right) dx \\ &= \int_0^L \left( a'(x, u_h) \frac{\partial u_h}{\partial x} \frac{d\phi_i}{dx} \phi_j + a(x, u_h) \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} + b'(x, u_h) \frac{\partial u_h}{\partial x} \phi_i \phi_j \right. \\ &\quad \left. + b(x, u_h) \phi_i \frac{d\phi_j}{dx} + c'(x, u_h) u_h \phi_i \phi_j + c(x, u_h) \phi_i \phi_j \right) dx. \end{aligned}$$

Integramos sobre un elemento  $\Omega_r$

$$\begin{aligned} J_{i,j}(u_h) &= \frac{\partial F_i}{\partial u_j} = \int_{x_r}^{x_{r+1}} \left( a'(x, u_h) \frac{\partial u_h}{\partial x} \frac{d\phi_i}{dx} \phi_j + a(x, u_h) \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} + b'(x, u_h) \frac{\partial u_h}{\partial x} \phi_i \phi_j \right. \\ &\quad \left. + b(x, u_h) \phi_i \frac{d\phi_j}{dx} + c'(x, u_h) u_h \phi_i \phi_j + c(x, u_h) \phi_i \phi_j \right) dx. \end{aligned}$$

Observamos que las funciones de base  $\phi_r$  y  $\phi_{r+1}$  son las únicas diferentes de cero sobre el elemento  $\Omega_r$ , entonces las entradas  $J_{r,r}$ ,  $J_{r,r+1}$ ,  $J_{r+1,r}$  y  $J_{r+1,r+1}$  del jacobiano  $J$  son distintas de cero y son las únicas que requieren ser calculadas para un elemento arbitrario  $\Omega_r$ . Entonces podemos almacenarlas

en una matriz local  $2 \times 2$  que denotamos por

$$J_{local}^r = \begin{bmatrix} J_{local,1,1}^r & J_{local,1,2}^r \\ J_{local,2,1}^r & J_{local,2,2}^r \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Más generalmente, expresamos  $J_{local,i,j}^r$  para  $i, j = 1, 2$  en función del cambio de variable  $X$  y las funciones de base locales como sigue

$$\begin{aligned} J_{local,i,j}^r = \int_0^{h_{r+1}} & \left( a'(X, u_h) \frac{\partial u_h}{\partial X} \frac{d\phi_{local,i}}{dX} \phi_{local,j} + a(X, u_h) \frac{d\phi_{local,i}}{dX} \frac{d\phi_{local,j}}{dX} + b'(X, u_h) \frac{\partial u_h}{\partial X} \phi_{local,i} \phi_{local,j} \right. \\ & \left. + b(X, u_h) \phi_{local,i} \frac{d\phi_{local,j}}{dX} + c'(X, u_h) u_h \phi_{local,i} \phi_{local,j} + c(X, u_h) \phi_{local,i} \phi_{local,j} \right) dX. \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_h}{\partial u_r} &= \phi_{local,1}(X) & \frac{\partial u_h}{\partial u_{r+1}} &= \phi_{local,2}(X) \\ \frac{\partial}{\partial u_r} \left( \frac{du_h}{dX} \right) &= \frac{d\phi_{local,1}}{dX} & \frac{\partial}{\partial u_{r+1}} \left( \frac{du_h}{dX} \right) &= \frac{d\phi_{local,2}}{dX}. \end{aligned}$$

Ahora procedemos a ensamblar la matriz jacobiana del siguiente modo:

$$\begin{cases} J_{1,1} = J_{local,1,1}^1 \\ J_{r,r} = J_{local,2,2}^{r-1} + J_{local,1,1}^r, & \text{para } r = 2, 3, \dots, M-1 \\ J_{r,r+1} = J_{local,1,2}^r, & \text{para } r = 1, 2, 3, \dots, M-1 \\ J_{r+1,r} = J_{local,2,1}^r, & \text{para } r = 1, 2, 3, \dots, M-1 \\ J_{M,M} = J_{local,2,2}^{M-1}. \end{cases}$$

Para la implementación computacional requerimos calcular las integrales de  $F_{local,i}^r$  y del jacobiano  $J_{local,i,j}^r$  para  $i, j = 1, 2$ , por lo tanto debemos transformar cada elemento de referencia  $0 \leq X \leq h_{r+1}$  en elementos de la forma  $-1 \leq t \leq 1$ , por medio del cambio de variable definido en la ecuación (2.33) así mismo expresamos las funciones de base locales en función de la variable  $t$  definidas en las ecuaciones (2.34) y (2.35), para finalmente aproximar las integrales por medio de la

cuadratura de Gauss-Legendre visto en la sección 1.1.

$$\begin{aligned}
F_{local,i}^r &= \frac{2}{h_{r+1}} \sum_{i=1}^4 \omega_i \left[ \frac{4}{h_{r+1}^2} a(x_i, u_h) \frac{du_h(x_i)}{dt} \frac{d\phi_{local,i}(x_i)}{dt} + \frac{2}{h_{r+1}} b(x_i, u_h) \frac{du_h(x_i)}{dt} \phi_{local,i}(x_i) \right. \\
&\quad \left. + c(x_i, u_h) u_h(x_i) \phi_{local,i}(x_i) + f\left(\frac{h_{r+1}}{2} + \frac{h_{r+1}}{2} x_i + x_r\right) \phi_{local,i}(x_i) \right] \\
J_{local,i,j}^r &= \frac{h_{r+1}}{2} \sum_{i=1}^4 \left[ \frac{4}{h_{r+1}^2} \frac{da(x_i, u_h)}{du_h} \frac{du_h(x_i)}{dt} \frac{d\phi_{local,i}(x_i)}{dt} \phi_{local,j}(x_i) \right. \\
&\quad + \frac{4}{h_{r+1}^2} a(x_i, u_h) \frac{d\phi_{local,i}(x_i)}{dt} \frac{d\phi_{local,j}(x_i)}{dt} + \frac{2}{h_{r+1}} \frac{db(x_i, u_h)}{du_h} \frac{du_h(x_i)}{dt} \phi_{local,i}(x_i) \phi_{local,j}(x_i) \\
&\quad + \frac{2}{h_{r+1}} b(x_i, u_h) \phi_{local,i}(x_i) \frac{d\phi_{local,j}(x_i)}{dt} + \frac{dc(x_i, u_h)}{du_h} u_h(x_i) \phi_{local,i}(x_i) \phi_{local,j}(x_i) \\
&\quad \left. + c(x_i, u_h) \phi_{local,i}(x_i) \phi_{local,j}(x_i) \right],
\end{aligned}$$

donde  $w_i$  ,  $x_i$  son los pesos y nodos de la cuadratura, respectivamente.

### 3.6. Ejemplos numéricos

En esta sección presentamos cuatro ejemplos de ecuaciones diferenciales no lineales, de los cuales los dos primeros tienen condiciones de frontera de tipo de Dirichlet, y los dos últimos tienen condiciones de frontera mixtas. El objetivo de estos ejemplos es comparar los resultados que se obtienen por el método de elementos finitos con sus soluciones exactas.

## Ejemplo 1

$$\begin{cases} -\frac{d^2u}{dx^2} - 2u\frac{du}{dx} = 0, & 0 < x < 1 \\ u(0) = 1, & u(1) = 0.5 \end{cases}$$

La solución exacta es  $u(x) = \frac{1}{1+x}$ .

En el entorno de MATLAB, introducimos una estimación inicial  $u_0$ , como se muestra a continuación en el siguiente fragmento de código, obteniendo la Figura 3.1.

```
x=linspace(0,1,200);  
M=length(x);  
u0=zeros(1,M);
```

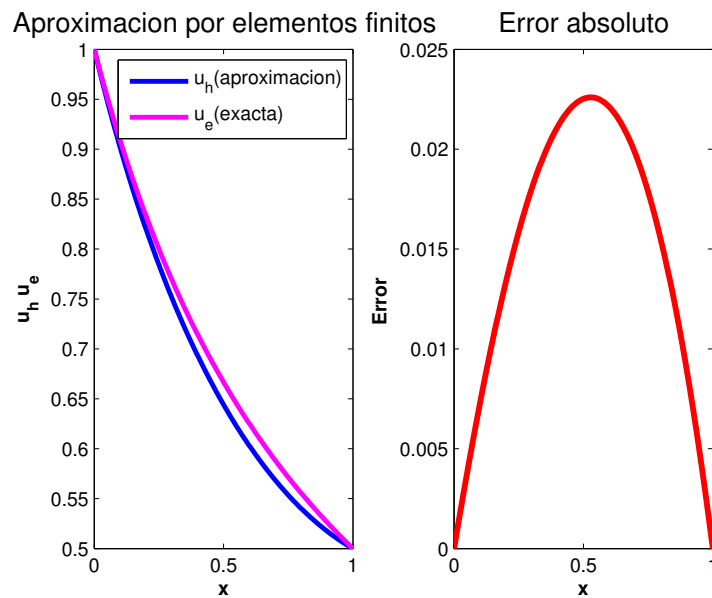


Figura 3.1: Después de 5 iteraciones, con una  $tol = 10^{-5}$  y 200 elementos lineales.

## Ejemplo 2

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}\left(u\frac{du}{dx}\right) + 2u^2 = 0, & 0 < x < 1 \\ u(0) = 1, & u(1) = e \end{cases}$$

La solución exacta es  $u(x) = e^x$ .

Tomando una estimación inicial como se muestra a continuación en un fragmento de código MATLAB, obtenemos la Figura 3.2.

```
x=linspace(0,1,200);  
M=length(x);  
u0=ones(1,M);  
u0=0.9*u0;
```

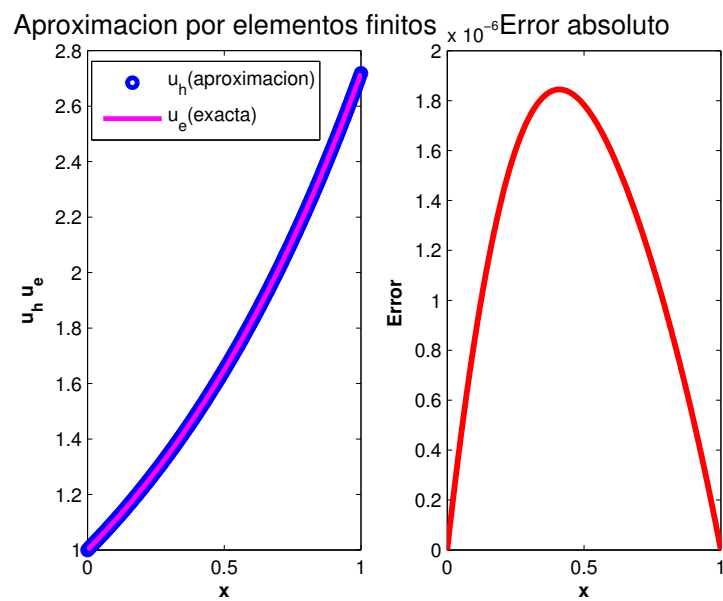


Figura 3.2: Después de 6 iteraciones, con una  $tol = 10^{-5}$  y 200 elementos lineales.

### Ejemplo 3

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}\left(u\frac{du}{dx}\right) = -1, & 0 < x < 1 \\ -\left[u\frac{du}{dx}\right]_{x=0} = 0, & u(1) = \sqrt{2} \end{cases}$$

La solución exacta es  $u(x) = \sqrt{1+x^2}$ .

Análogamente, tomamos una estimación inicial  $u_0$  como se muestra a continuación en un fragmento de código MATLAB, obtenemos la Figura 3.3.

```
x=linspace(0,1,100);
```

```
M=length(x);
```

```
u0=ones(1,M);
```

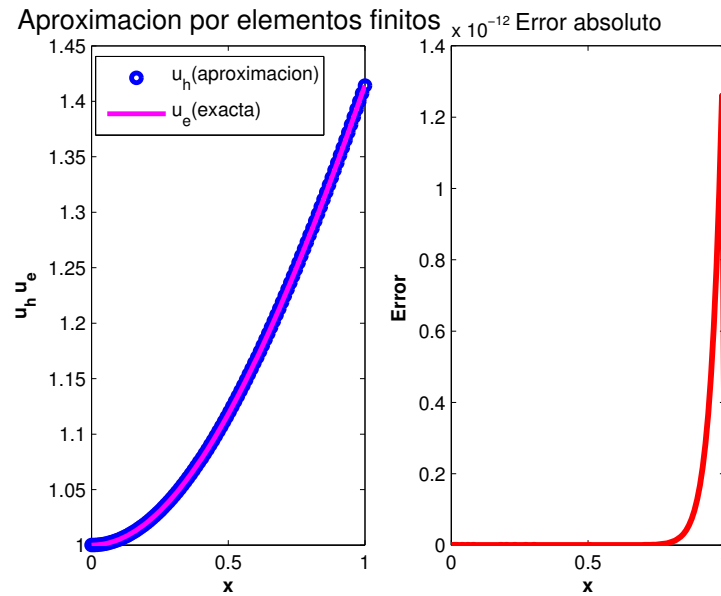


Figura 3.3: Después de 4 iteraciones, con una  $tol = 10^{-5}$  y 100 elementos lineales.

## Ejemplo 4

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left[ (1+u^2) \frac{du}{dx} \right] + 8u^2 = -2(1+x^4), & -1 < x < 2 \\ u(-1) = 1, & (1+u^2) \frac{du}{dx} \Big|_{x=2} = 68 \end{cases}$$

La solución exacta es  $u(x) = x^2$ .

Finalmente, tomando una estimación inicial  $u_0$  como se muestra a continuación en un fragmento de código MATLAB, obtenemos la Figura 3.4.

```
x=linspace(-1,2,150);
M=length(x);
u0=zeros(1,M);
```

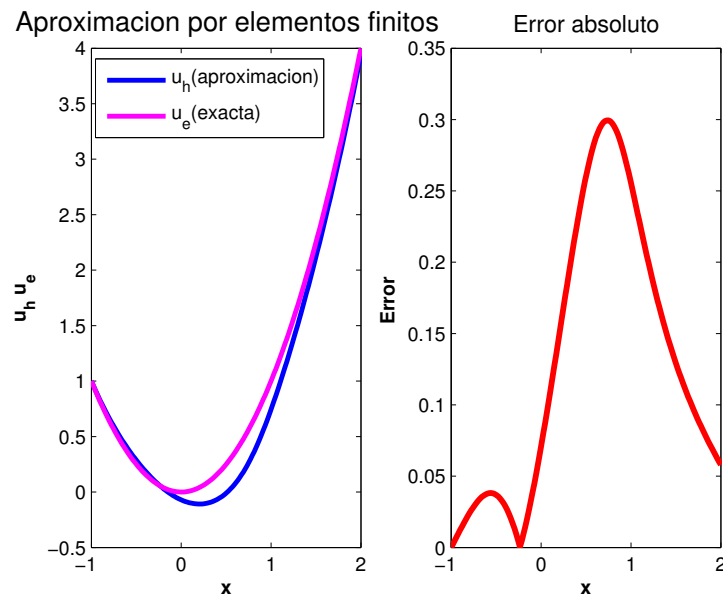


Figura 3.4:  $tol = 10^{-6}$  y 150 elementos lineales.



## Capítulo 4

# Método de elementos finitos aplicado a una ecuación parabólica no lineal

En este capítulo desarrollamos el método de elementos finitos para problemas no lineales dependientes del tiempo, el cual es el objetivo principal de esta tesis. Partimos de un prototipo de ecuación de reacción-difusión no lineal que es la ecuación de Fisher-Kolmogorov en una dimensión. Explicamos brevemente algunos métodos para obtener soluciones analíticas mediante *ondas de desplazamiento* u *ondas itinerantes* como se puede ver en [11], también en [8] y su posterior resolución por el método de factorización como se desarrolla en [27] y [7]. Luego, la aproximación por elementos finitos para este tipo de problema involucra los siguientes pasos: primero discretizamos la derivada del tiempo mediante una aproximación por diferencias finitas, como es presentado en [15], este paso da como resultado un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales en cada nivel de tiempo, que son continuas en el espacio. Como se vió en el Capítulo 3, aproximamos estas EDOs no lineales por el método de elementos finitos y finalmente resolvemos por el método de Newton el sistema de ecuaciones no lineales resultante.

## 4.1. Solución analítica de la ecuación de Fisher-Kolmogorov

Existen muchos procesos naturales que involucran mecanismos de difusión-reacción y dichos problemas son generalmente modelados por un tipo de ecuaciones parabólicas denominadas *ecuaciones de reacción-difusión* de la forma:

$$u_t - Du_{xx} = f(u),$$

donde  $D$  representa el coeficiente de difusión y  $f$  es una función no lineal de  $u$ .

Estas ecuaciones se han convertido en las más importantes debido a su presencia en muchos procesos biológicos y químicos. Es así que la ecuación de Fisher-Kolmogorov es un caso particular de una ecuación de reacción-difusión no lineal, la cual se considera como una de las más simples, además se encuentra en diversas aplicaciones tales como la propagación de genes, la transferencia de masa, procesos de reacción química autocatalítica, la combustión en el proceso de movimiento browniano ramificado, etc.

La ecuación de reacción-difusión no lineal propuesta por Fisher (1937) se define por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + su(1 - u), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \quad (4.1)$$

Si hacemos  $t' = st$  y  $x' = \left(\frac{s}{v}\right)^{1/2}$ , entonces reescribimos la ecuación anterior como

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1 - u), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \quad (4.2)$$

### 4.1.1. Soluciones de onda viajera

Hay varios métodos para la construcción de soluciones exactas de ecuaciones pertenecientes a la física-matemática, como es el caso de la ecuación de Fisher, estos métodos están basados en reducir las ecuaciones originales a ecuaciones con menos variables dependientes.

Es así que la solución de ondas viajeras aplicadas a problemas de evolución reduce la EDP a una EDO, facilitando el análisis y la solución.

Por definición, la solución de onda viajera es de la forma

$$u(x, t) = W(z), \quad z = x - ct, \quad (4.3)$$

se denomina así ya que corresponde a una traslación lineal a lo largo del eje  $x$  con respecto a  $z$ , siendo  $c$  la velocidad de onda. Si  $c = 0$  corresponde a una solución estacionaria, si  $c > 0$ , la onda viaja a lo largo del eje  $x$  en dirección creciente.

De (4.2), en el problema espacialmente homogéneo, los estados estacionarios son  $u = 0$  y  $u = 1$  que son soluciones inestables y estables respectivamente, luego es apropiado buscar soluciones de onda viajera de (4.2) para las cuales  $0 \leq u(x, t) \leq 1$ .

Sustituimos (4.3) en (4.2)

$$\frac{\partial W(z)}{\partial t} = \frac{\partial^2 W(z)}{\partial x^2} + W(z)(1 - W(z))$$

donde

$$\frac{\partial W(z)}{\partial t} = \frac{\partial W(z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = -c \frac{dW}{dz}$$

y

$$\frac{\partial^2 W(z)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial W}{\partial z} \right) = \frac{d^2 W}{dz^2}$$

entonces obtenemos la siguiente ecuación diferencial ordinaria de segundo orden para  $W(z)$

$$-c \frac{dW}{dz} = W(1 - W) + \frac{d^2 W}{dz^2}$$

osea

$$W'' + cW' + W(1 - W) = 0, \quad z \in \mathbb{R} \quad (4.4)$$

donde  $W(z)$  satisface las siguientes condiciones

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} W(z) = 1, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} W(z) = 0. \quad (4.5)$$

Así, encontrar una solución de onda viajera en la EDO (4.4) con las condiciones dadas en (4.5) es equivalente a encontrar la solución a la EDP (4.2) con  $u(x, t) = W(z)$ .

A continuación, veremos la solución analítica de (4.4) usando el enfoque del método de factori-

zación como se puede ver en [7], [27] y [11], sin embargo, otra manera de obtener dichas soluciones es mediante el método de perturbación como se puede ver en [23], [19], [8] y [29]. Antes de esto, vamos a analizar el problema en un plano de fase bidimensional.

La ecuación diferencial no lineal (4.4) se puede reducir a un par de ecuaciones diferenciales de primer orden, para ello introducimos una variable dependiente  $V$  tal que

$$\begin{aligned} W' &= V \\ V' &= -cW' - W(1 - W) = -cV - W(1 - W), \end{aligned} \tag{4.6}$$

hallamos los puntos críticos del sistema (4.6), sea

$$\begin{aligned} P(W, V) &= V \\ Q(W, V) &= -cV - W(1 - W). \end{aligned}$$

Sea  $(W_0, V_0)$  el punto crítico de (4.6) luego

$$\begin{aligned} P(W_0, V_0) &= V_0 = 0 \\ Q(W_0, V_0) &= -cV_0 - W_0(1 - W_0) = 0, \end{aligned}$$

entonces los puntos críticos  $(W_0, V_0)$  del sistema son:  $(0, 0)$  y  $(1, 0)$ . La matriz  $A$  asociado con el sistema (4.6) en el punto crítico  $(W_0, V_0)$  es

$$A = \begin{pmatrix} P_W(W_0, V_0) & P_V(W_0, V_0) \\ Q_W(W_0, V_0) & Q_V(W_0, V_0) \end{pmatrix}.$$

Luego, en nuestro problema viene a ser

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 + 2W & -c \end{pmatrix}.$$

Evaluando la matriz  $A$  en el punto crítico  $(0, 0)$ , obtenemos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -c \end{pmatrix},$$

análogamente para  $(1, 0)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -c \end{pmatrix}.$$

Los autovalores  $\lambda$  de la matriz  $A$  en  $(0, 0)$  son las raíces de la ecuación

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -c - \lambda \end{pmatrix} = 0,$$

$$\lambda^2 + c\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4}}{2}$$

Si  $c^2 - 4 \geq 0$  entonces  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  tal que  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$  o  $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ , así, acorde con la teoría de sistemas dinámicos, el nodo  $(0, 0)$  es un nodo estable para  $c \geq 2$  y cuando  $c = 2$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2$ , luego  $(0, 0)$  es un nodo degenerado. Si  $c^2 - 4 < 0$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ , con  $Re(\lambda_1) < 0$ ,  $Re(\lambda_2) < 0$ , así la curva solución es una espiral estable. Finalmente, los autovalores de la matriz  $A$  en el nodo  $(1, 0)$

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -c - \lambda \end{pmatrix} = 0,$$

$$\lambda^2 + c\lambda - 1 = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 + 4}}{2},$$

desde que  $c^2 + 4 > 0$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  y  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , luego  $(1, 0)$  es un punto silla.

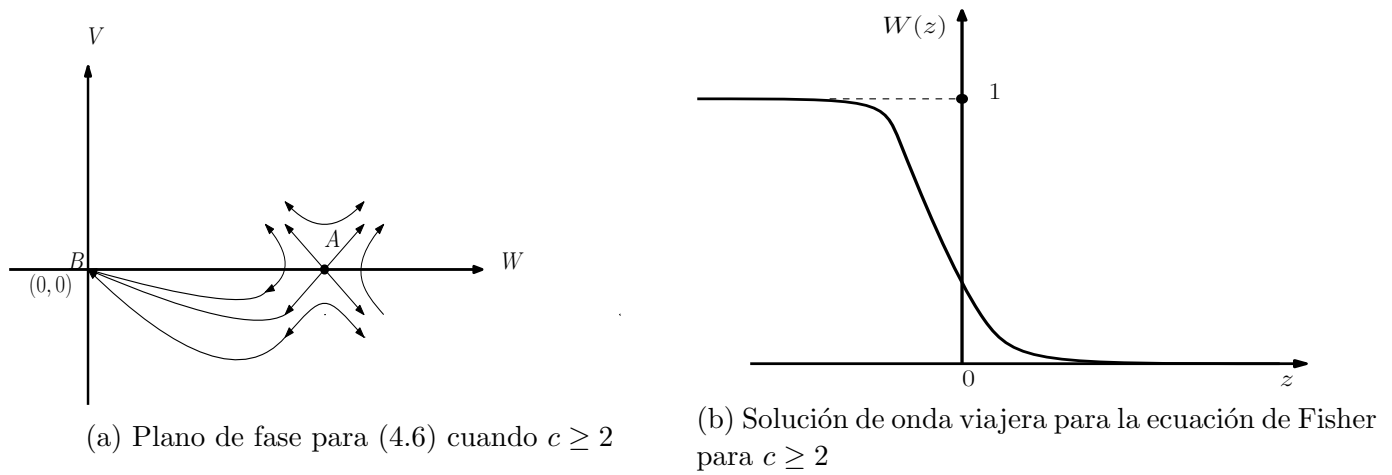


Figura 4.1: Tomado de [19]

Del plano de fase mostrado en la Figura 4.1a, existe una trayectoria de  $A$  correspondiente al nodo inestable  $(1, 0)$  a  $B$  correspondiente al nodo estable  $(0, 0)$ , situado en el cuarto cuadrante  $W \geq 0$ ,  $V \leq 0$  con  $0 \leq W \leq 1$ , para todas las velocidades de onda  $c \geq 2$ . Dicha trayectoria, es descrita por las funciones  $W = W(z)$ ,  $V = V(z)$  con condiciones de frontera  $W \rightarrow 1$  cuando  $z \rightarrow -\infty$  y  $V \rightarrow 0$  cuando  $z \rightarrow +\infty$ , entonces para  $c \geq 2$  existe una solución de onda viajera  $u(x, t) = W(x - ct)$  a la ecuación (4.2) con la propiedad que  $W$  decrece monóticamente en  $\mathbb{R}$ , es decir,

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} W(z) = 0,$$

además,

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} W(z) = 1 \quad y \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} W(z) = 0. \quad (4.7)$$

Kolmogorov (1937), probó que para los datos iniciales del tipo  $0 \leq u(x, 0) \leq 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , la solución de la ecuación de Fisher (4.2) está también acotada

$$0 \leq u(x, t) \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

también probó que, para los tipos de datos iniciales discontinuos de la forma

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < 0 \\ 0, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < a \\ f(x), & \text{si } a < x < b \\ 0, & \text{si } x > b \end{cases}$$

la solución  $u(x, t)$  de (4.2), evoluciona a una solución de onda viajera  $W(z)$  con  $z = x - 2t$ , es decir, se propaga hacia la derecha con la velocidad mínima  $c_{min} = 2$ .

#### 4.1.2. Método de Factorización para EDOs con polinomios no lineales

En la sección anterior hemos visto la existencia de ondas viajeras por medio de un argumento geométrico, en un plano de fase, sin embargo no tenemos una fórmula explícita para la solución. La idea de factorizar es convertir la ecuación original en factores de menor grado. Siguiendo esta idea, aquí factorizaremos una ecuación diferencial ordinaria del tipo:

$$u'' + \gamma u' + F(u) = 0$$

donde  $F(u)$  es un polinomio en  $u$ . El coeficiente  $\gamma$  en nuestro caso particular vendría a ser la velocidad de onda viajera usada para reducir una ecuación de reacción-difusión como la ecuación de Fisher a una EDO, luego esta EDO resultante es factorizada y las ecuaciones que se obtienen al igualar cada factor a cero son resueltas independientemente.

De (4.4) tenemos

$$\frac{d^2 W}{dz^2} + c \frac{dW}{dz} + \hat{F}(W) = 0, \quad z \in \mathbb{R}$$

factorizamos la función polinomial  $\hat{F}(W)$  como

$$\begin{aligned} \hat{F}(W) &= W(1 - W) \\ \frac{\hat{F}(W)}{W} &= (1 - W) = (1 - W^{1/2})(1 + W^{1/2}), \end{aligned}$$

luego, introducimos una constante  $a$  que será determinada posteriormente y escogemos

$$\begin{aligned} f_1 &= a(1 - W^{1/2}) \\ f_2 &= \frac{1}{a}(1 + W^{1/2}), \quad a \neq 0, \end{aligned} \tag{4.8}$$

en general, la factorización de (4.2) es de la forma

$$(D - f_2(W))(D - f_1(W))W = 0, \quad \text{donde} \quad D = \frac{d}{dZ},$$

su desarrollo lleva a la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} (D - f_2(W))(DW - f_1(W)W) &= 0 \\ D^2W - D(f_1(W)W) - f_2(W)DW + f_1(W)f_2(W)W &= 0 \\ D^2W - Df_1(W)WDW - f_1(W)DW - f_2(W)DW + f_1(W)f_2(W)W &= 0 \end{aligned}$$

es decir

$$\frac{d^2W}{dz^2} - \frac{df_1}{dz} \frac{dW}{dz} W - f_1 \frac{dW}{dz} - f_2 \frac{dW}{dz} + f_1 f_2 W = 0,$$

luego

$$\frac{d^2W}{dz^2} - \left( \frac{df_1}{dz} W + f_1 + f_2 \right) \frac{dW}{dz} + f_1 f_2 W = 0, \tag{4.9}$$

reemplazamos (4.8)

$$\begin{aligned} \frac{df_1}{dz} W + f_1 + f_2 &= -\frac{1}{2}aW^{-1/2}W + a(1 - W^{1/2}) + \frac{1}{a}(1 + W^{1/2}) \\ &= -\frac{1}{2}aW^{1/2} + a - aW^{1/2} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a}W^{1/2} \\ \frac{df_1}{dz} W + f_1 + f_2 &= \left( -\frac{1}{2}a - a + \frac{1}{a} \right) W^{1/2} + a + \frac{1}{a} \end{aligned} \tag{4.10}$$

por otro lado de (4.4) y (4.9) se tiene

$$-c = \frac{df_1}{dz} W + f_1 + f_2 \tag{4.11}$$



igualamos (4.11) y (4.10)

$$-c = \left(-\frac{1}{2}a - a + \frac{1}{a}\right)W^{1/2} + \left(a + \frac{1}{a}\right).$$

Igualamos a cero el coeficiente de la variable  $W^{1/2}$ , ya que la EDO (4.11) es igual a una constante, así

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}a - a + \frac{1}{a} &= 0 \\ -a\left(\frac{1}{2} + 1\right) + \frac{1}{a} &= 0 \\ -a\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{a} &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{-3a^2 + 2}{2a} = 0, \quad a \neq 0$$

$$-3a^2 = -2$$

$$a = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (4.12)$$

además  $-c = \frac{1}{a} + a = \frac{a^2 + 1}{a}$ , luego  $c = \pm \frac{5}{\sqrt{6}}$ . Reemplazamos en la ecuación (4.9)

$$\frac{d^2W}{dx^2} \pm (a + a^{-1})\frac{dW}{dz} + f_1f_2W = 0, \quad (4.13)$$

así la factorización correspondiente  $[D - f_2(W)][D - f_1(W)]W = 0$  se convierte en

$$[D \pm a^{-1}(W^{1/2} + 1)][D \mp a(1 - W^{1/2})]W = 0.$$

La ecuación (4.13) es compatible con la EDO de primer orden  $[D \mp a(1 - W^{1/2})]W = 0$  es decir

$$\frac{dW}{dz} \mp a(1 - W^{1/2})W = 0, \quad (4.14)$$

integramos la ecuación (4.14) y para  $c > 0$

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dz} + a(1 - W^{1/2})W &= 0 \\ \frac{dW}{dz} &= -a(1 - W^{1/2})W \\ \frac{dW}{dz} &= -a(1 - W^{1/2})W \\ \frac{dW}{dz} &= a(W^{1/2} - 1)W \\ \int \frac{1}{(W^{1/2} - 1)W} dW &= \int a dz\end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$W = [1 + Ke^{\frac{a}{2}z}]^{-2}$$

entonces

$$u(x, t) = [1 + Ke^{\frac{a}{2}(x-ct)}]^{-2}$$

reemplazamos los valores de  $a$  y  $c$

$$u(x, t) = [1 + Ke^{\pm \frac{1}{\sqrt{6}}(x - \frac{5}{\sqrt{6}}t)}]^{-2}. \quad (4.15)$$

Si  $c < 0$ , obtenemos

$$W = [1 + Ke^{-\frac{a}{2}z}]^{-2}$$

luego

$$u(x, t) = [1 + Ke^{\pm \frac{1}{\sqrt{6}}(x + \frac{5}{\sqrt{6}}t)}]^{-2}. \quad (4.16)$$

Tomando  $f_1 = a(1 + W^{1/2})$  y  $f_2 = \frac{1}{a}(1 - W^{1/2})$  obtenemos los mismos valores de  $a$  y  $c$ . Además se mantiene la misma ecuación (4.13) pero ahora con la factorización

$$\left[ D \mp \frac{1}{a}(1 - W^{1/2}) \right] \left[ D \mp a(1 + W^{1/2}) \right] W = 0$$

y por lo tanto compatible con la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dW}{dz} \mp a(1 + W^{1/2})W = 0.$$

De forma análoga, para  $c > 0$  e integramos

$$\frac{dW}{dz} = -a(1 + W^{1/2})W$$

$$\int \frac{1}{(1 + W^{1/2})W} dW = \int -a dz$$

luego,

$$W = [-1 + K e^{\frac{a}{2}z}]^{-2}$$

por lo tanto

$$u(x, t) = [-1 + K e^{\pm \frac{1}{\sqrt{6}}(x - \frac{5}{\sqrt{6}}t)}]^{-2}. \quad (4.17)$$

### 4.1.3. Método de Perturbación

Si una ecuación diferencial no puede resolverse explícitamente, a menudo, se intenta obtener información útil sobre las soluciones al calcular las aproximaciones analíticas, que están cerca de las soluciones reales, así este método nos permite encontrar dichas aproximaciones analíticas.

En particular, para nuestro problema, usamos este método para obtener una aproximación de la solución en el caso  $c \geq 2$ . Así, buscamos una solución aproximada del problema de valor frontera (4.4)-(4.7) que son

$$W'' + cW' + W(1 - W) = 0, \quad z \in \mathbb{R}$$

$$W(-\infty) = 1$$

$$W(+\infty) = 0$$

donde  $c \geq 2$  y  $W(-\infty) = 1$ ,  $W(+\infty) = 0$  denotan los límites cuando  $z \rightarrow -\infty$  y  $z \rightarrow +\infty$  respectivamente. Dado que las soluciones de onda viajera son invariantes con respecto a la traslación, es decir, si  $W(z)$  es una solución, entonces también lo es  $W(z + z_0)$ , para cualquier  $z_0$  fijo. Tomamos  $W(z)$  en  $z = 0$  para que sea igual a cualquier número en el rango de  $W$ . Luego, podemos tomar  $W(0) = \frac{1}{2}$  (ver Figura 4.2).

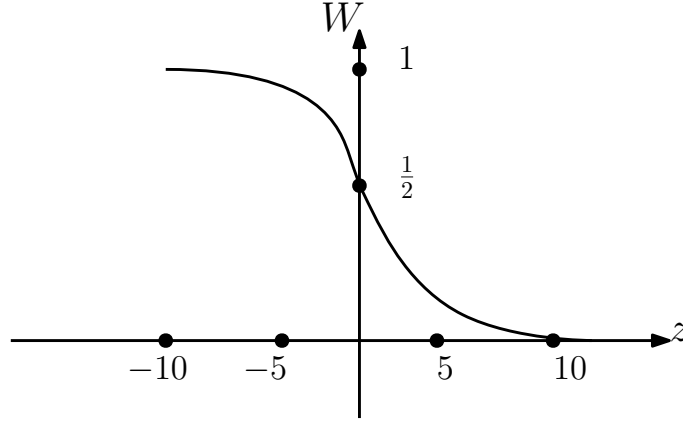


Figura 4.2: Solución de onda viajera de la ecuación de Fisher. Tomado de [28]

Consideremos el problema de valor frontera e inicial al que aplicaremos el método de perturbación

$$W'' + cW' + W(1 - W) = 0 \quad (4.18)$$

$$W(0) = \frac{1}{2}, \quad W(-\infty) = 1, \quad W(+\infty) = 0. \quad (4.19)$$

Introducimos un pequeño parámetro  $0 < \varepsilon = \frac{1}{c^2} \leq 0.25$  y una nueva variable

$$\xi = \sqrt{\varepsilon} z = \frac{z}{c}, \quad W(z) = g(\xi).$$

Entonces la ecuación diferencial (4.18) y las condiciones (4.19) se convierten en

$$\varepsilon \frac{d^2 g}{d\xi^2} + \frac{dg}{d\xi} + g(1 - g) = 0 \quad (4.20)$$

$$g(-\infty) = 1, \quad g(0) = \frac{1}{2}, \quad g(+\infty) = 0. \quad (4.21)$$

Buscamos una expansión de la serie de perturbaciones para  $g(\xi)$  en potencias de  $\varepsilon$

$$g(\xi, \varepsilon) = g_0(\xi) + \varepsilon g_1(\xi) + \varepsilon^2 g_2(\xi) + \dots \quad (4.22)$$

donde  $g_0(\xi)$ ,  $g_1(\xi)$  y  $g_2(\xi)$  deben ser determinados. Sustituimos (4.22) en (4.20)

$$\begin{aligned} &\varepsilon(g_0'' + \varepsilon g_1'' + \varepsilon^2 g_2'' + \dots) + (g_0' + \varepsilon g_1' + \varepsilon^2 g_2' + \dots) \\ &+ (g_0 + \varepsilon g_1 + \varepsilon g_2 + \dots)(1 - g_0 - \varepsilon g_1 - \varepsilon^2 g_2 - \dots) = 0, \end{aligned}$$

luego, agrupamos los coeficientes de cada potencia de  $\varepsilon$  igualamos a cero cada ecuación.

$$g_0' + g_0(1 - g_0) = 0$$

$$g_0(-\infty) = 1, \quad g_0(0) = \frac{1}{2}, \quad g_0(\infty) = 0$$

cuya solución es

$$g_0(\xi) = \frac{1}{1 + e^\xi},$$

además

$$g_1' + g_1(1 - 2g_0) + g_0'' = 0$$

$$g_1(-\infty) = g_1(\infty) = g_1(0) = 0$$

cuya solución es

$$g_1(\xi) = \frac{e^\xi}{(1 + e^\xi)^2} \ln \left( \frac{4e^\xi}{(1 + e^\xi)^2} \right).$$

En consecuencia, reemplazamos  $g_0$  y  $g_1$  en nuestra serie perturbada (4.22), y así obtenemos la solución aproximada del problema original

$$g(\xi, \varepsilon) = \frac{1}{1 + e^\xi} + \varepsilon \ln \left( \frac{4e^\xi}{(1 + e^\xi)^2} \right) \frac{e^\xi}{(1 + e^\xi)^2} + o(\varepsilon^2) \quad (4.23)$$

donde  $\xi = \frac{z}{c} = \frac{1}{c}(x - ct)$ .

Luego, en las variables originales  $W$  y  $z$ , la expresión (4.22) se convierte en

$$W(z) = \frac{1}{1 + e^{z/c}} + \frac{1}{c^2} \ln \left( \frac{4e^{z/c}}{(1 + e^{z/c})^2} \right) \frac{e^{z/c}}{(1 + e^{z/c})^2} + o\left(\frac{1}{c^4}\right). \quad (4.24)$$

Por lo tanto hemos obtenido la solución asintótica de la onda viajera para  $c \geq 2$ .

En general buscamos soluciones analíticas para (4.18), con la forma del primer término de la

solución aproximada (4.23), es decir,

$$W(z) = \frac{1}{(1 + ae^{z/\sqrt{6}})^2}.$$

Esta solución tiene una velocidad de onda  $c = \frac{5}{\sqrt{6}}$ , además la constante arbitraria  $a$  puede ser elegida de modo que  $W = \frac{1}{2}$  cuando  $z = 0$ , siendo  $a = \sqrt{2} - 1$ .

Dado que la solución de Fisher es una ecuación diferencial parcial no lineal, es difícil encontrar una solución general exacta, por lo que no se han encontrado soluciones analíticas para una velocidad de onda  $c$  general, sin embargo existen estudios acerca la solución exacta como se puede consultar en los artículos [38] y [1].

Hay varios métodos para buscar dichas soluciones como se ha encontrado en la literatura y hemos mencionado brevemente alguna de ellas en las secciones anteriores acerca del comportamiento de las soluciones en términos de ondas viajeras.

El motivo por el cual hemos desarrollado alguna solución analítica de la ecuación de Fisher (4.2) es precisamente como una forma de validar nuestro método numérico para el cual, esperamos que los resultados obtenidos mediante el cálculo numérico coincidan con los valores obtenidos por la solución analítica.

En este capítulo consideraremos el PVIF asociado a la ecuación de Fisher-Kolmogorov unidimensional

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta u(1 - u) \quad a < x < b, \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = p, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(b, t) = q, \quad t \in [0, T] \quad (4.26)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (4.27)$$

donde  $u = u(x, t)$  y  $u_0$  es la condición inicial.

## 4.2. Discretización del tiempo

Empezamos particionando el intervalo del tiempo  $0 < t < T$  en  $N$  intervalos no necesariamente iguales

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = T.$$

Para cada valor de  $t$  vamos a evaluar la función  $u(x, t)$ , entonces para cada  $n = 0, 1, \dots, N$  definimos una función  $u^{(n)}(x)$ , es decir,

$$u^{(n)}(x) = u(x, t_n). \quad (4.28)$$

Expresamos la ecuación (4.25) en algún nivel de tiempo  $t_n$

$$\frac{\partial u^{(n)}(x)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u^{(n)}(x)}{\partial x^2} + \beta u^{(n)}(x)(1 - u^{(n)}(x)), \quad (4.29)$$

donde

$$\left. \frac{\partial u(x)}{\partial t} \right|_{t=t_n} = \frac{\partial u^{(n)}(x)}{\partial t}.$$

Luego, aproximamos la derivada temporal  $\frac{\partial u^{(n)}}{\partial t}$  por medio del método de Euler regresivo o diferencias finitas regresivas

$$\frac{\partial u^{(n)}}{\partial t} \approx \frac{u^{(n)} - u^{(n-1)}}{t_n - t_{n-1}}, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, N. \quad (4.30)$$

Sustituimos (4.30) en (4.29) y obtenemos

$$\frac{u^{(n)} - u^{(n-1)}}{\Delta t} = \alpha \frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial x^2} + \beta u^{(n)}(1 - u^{(n)}),$$

reordenamos la expresión anterior

$$\alpha \frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial x^2} - \frac{u^{(n)}}{\Delta t} + g(u^{(n)}) + \frac{u^{(n-1)}}{\Delta t} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, N \quad (4.31)$$

donde  $\Delta t = t_n - t_{n-1}$  y  $g(u^{(n)}) = \beta u^{(n)}(1 - u^{(n)})$ .

Observamos que (4.31) es un conjunto recursivo de problemas estacionarios, donde deseamos

calcular  $u^{(n)}$  teniendo como valor conocido a  $u^{(n-1)}$ .

Como sabemos, hemos definido la función  $u^{(n)}(x)$  para cada  $n = 0, 1, 2, \dots, N$  y conocemos  $u(x, t_0)$  ya que es dato inicial del problema, así que solo faltaría calcular  $u^{(1)}(x), u^{(2)}(x), \dots, u^{(N)}(x)$ . La forma de hallar dichos valores será por medio del cálculo de los coeficientes de elementos finitos, es decir, vamos a aproximar por elementos finitos a  $u(x, t_n(x))$  en cada tiempo  $t = t_n$  fijo,

$$\begin{aligned} u^{(1)}(x) &\approx u_h^{(1)}(x) \\ u^{(2)}(x) &\approx u_h^{(2)}(x) \\ &\vdots \\ u^{(N)}(x) &\approx u_h^{(N)}(x), \end{aligned}$$

donde  $u_h^{(n)}(x)$  es la aproximación por elementos finitos.

Reescribimos el problema continuo en el espacio como sigue

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha \frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial x^2} - \frac{u^{(n)}}{\Delta t} + g(u^{(n)}) + \frac{u^{(n-1)}}{\Delta t} = 0, & a < x < b, \quad 0 \leq t \leq T \\ \frac{\partial u^{(n)}(a)}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial u^{(n)}(b)}{\partial x} = q, & t \in [0, T] \\ u^{(0)}(x) = u_0(x) & x \in [a, b]. \end{array} \right. \quad (4.32)$$

### 4.3. Aplicación del método de elementos finitos a una EDO no lineal

En esta sección desarrollaremos el enfoque menos común, que consiste en aplicar el método de elementos finitos a una secuencia recursiva de problemas continuos en el espacio luego de haber discretizado por diferencias finitas la derivada temporal del problema (4.25).



### 4.3.1. Formulaci3n Variacional

Sea el espacio  $V = H^1(a, b) = \{v : v \in L^2(a, b), \frac{dv}{dx} \in L^2(a, b)\}$ , entonces para cada instante de tiempo  $n$  definimos el problema variacional de (4.32).

Hallar  $u_h^{(n)} \in V$  tal que

$$\int_a^b \left( -\alpha \frac{\partial u^{(n)}}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{u^{(n)}}{\Delta t} v + g(u^{(n)})v + \frac{u^{(n-1)}}{\Delta t} v \right) dx + \alpha v(b)q - \alpha v(a)p = 0 \quad (4.33)$$

para todo  $v \in V$ .

Luego, el m3todo de elementos finitos consiste en reemplazar el espacio continuo  $V$  por el espacio discreto de funciones lineales por partes  $V_h$  en la formulaci3n variacional (4.33), por lo tanto nuestro problema variacional discreto para cada  $n = 1, 2, \dots, N$  est3 dado por

Hallar  $u_h^{(n)} \in V_h$  tal que

$$\int_a^b \left( -\alpha \frac{\partial u_h^{(n)}}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{u_h^{(n)}}{\Delta t} v + g(u_h^{(n)})v + \frac{u_h^{(n-1)}}{\Delta t} v \right) dx + \alpha v(b)q - \alpha v(a)p = 0 \quad (4.34)$$

para todo  $v \in V_h$ .

Sea  $u_h^{(n)}(x) = \sum_{j=1}^m u_j^{(n)} \phi_j(x)$  la aproximaci3n de elementos finitos en el tiempo  $t_n$ , donde  $m$  es el

n3mero de nodos en el intervalo  $a < x < b$ , adem3s  $u_h^{(n-1)}$  es la aproximaci3n por elementos finitos en el tiempo  $t_{n-1}$ . Vamos a expresar (4.34) en la siguiente forma:

Para cada  $n = 1, 2, \dots, N$ , hallar  $u_h^{(n)} \in V_h$  tal que

$$F(u_h^{(n)}, v) = 0 \quad \text{para todo } v \in V_h. \quad (4.35)$$

Tomamos  $v = \phi_i$  para cualquier  $i = 1, 2, \dots, m$ , luego

$$F_i = \int_a^b \left( -\alpha \frac{\partial u_h^{(n)}}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} - \frac{u_h^{(n)}}{\Delta t} \phi_i + g(u_h^{(n)})\phi_i + \frac{u_h^{(n-1)}}{\Delta t} \phi_i \right) dx + \alpha \phi_i(b)q - \alpha \phi_i(a)p = 0. \quad (4.36)$$

$F_i = 0$  son ecuaciones algebraicas no lineales y en nuestro contexto las variables desconocidas son  $u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, \dots, u_m^{(n)}$ , para calcularlas recurrimos al m3todo de Newton, para esto debemos calcular

el jacobiano del sistema no lineal (4.36)

$$J_{i,j} = \frac{\partial F_i}{\partial u_j^{(n)}} \quad (4.37)$$

donde

$$J_{i,j} = \int_a^b \left( -\alpha \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} - \frac{\phi_j}{\Delta t} \phi_i + g(u_h^{(n)})' \phi_j \phi_i \right) dx \quad (4.38)$$

con  $g(u_h^{(n)})' = \beta(1 - 2u_h^{(n)})$ .

Resolvemos el sistema no lineal (4.36) por el método de Newton, como se definió en (3.16) y (3.17), para cada instante de tiempo  $t_n$ , es decir,

$$J_{i,j}(u_1^{(n),k}, u_2^{(n),k}, \dots, u_m^{(n),k}) \delta u_j^{(n)} = -F_i(u_1^{(n),k}, u_2^{(n),k}, \dots, u_m^{(n),k}),$$

$$u_j^{(n+1),k} = u_j^{(n),k} + \delta u_j^{(n)}.$$

con  $i, j = 1, 2, \dots, m$  y  $k = 0, 1, 2, \dots$  viene a ser el número de iteraciones del método de Newton. Por otra parte, si  $J(u^{(n)})$  es una matriz no singular y las segundas derivadas parciales de  $J$  son acotadas, entonces el método de Newton converge cuadráticamente en una vecindad de  $u^{(n)}$ , el teorema 1 del Capítulo 1 garantiza este resultado.

## 4.4. Emsamblaje de las ecuaciones algebraicas

De la ecuación (4.36) tenemos

$$F_i = \int_a^b \left( -\alpha \frac{\partial u_h^{(n)}}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} - \frac{u_h^{(n)}}{\Delta t} \phi_i + g(u_h^{(n)}) \phi_i + \frac{u_h^{(n-1)}}{\Delta t} \phi_i \right) dx,$$

notamos que la función de base  $\phi_i$  tiene como dominio los intervalos  $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ ,  $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ , entonces

$$F_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left( -\alpha \frac{\partial u_h^{(n)}}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} - \frac{u_h^{(n)}}{\Delta t} \phi_i + g(u_h^{(n)}) \phi_i + \frac{u_h^{(n-1)}}{\Delta t} \phi_i \right) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( -\alpha \frac{\partial u_h^{(n)}}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} - \frac{u_h^{(n)}}{\Delta t} \phi_i + g(u_h^{(n)}) \phi_i + \frac{u_h^{(n-1)}}{\Delta t} \phi_i \right) dx.$$

Sea un elemento arbitrario  $\Omega_i : 0 \leq X \leq h_{i+1}$ , podemos expresar  $F$  sobre dicho elemento con la notación de las funciones de base locales tales como

$$\begin{aligned} \phi_i(X) &= \phi_{local,1}(X) = 1 - \frac{X}{h_{i+1}}, \\ \phi_{i+1}(X) &= \phi_{local,2}(X) = \frac{X}{h_{i+1}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $F_{local,1}^i$  y  $F_{local,2}^i$  del elemento  $\Omega_i$  deben adicionarse a las entradas  $F_i$  y  $F_{i+1}$  respectivamente, luego el vector local  $F_{local}^i$  es

$$F_{local}^i = \begin{bmatrix} F_{local,1}^i \\ F_{local,2}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i \\ F_{i+1} \end{bmatrix},$$

además la solución por elementos finitos sobre el elemento  $\Omega_i$  está dada por

$$u_h^{(n)}(X) = u_i^{(n)} \phi_{local,1}(X) + u_{i+1}^{(n)} \phi_{local,2}(X).$$

Entonces, para  $i = 2, 3, \dots, m-1$  tenemos

$$\begin{aligned} F_i &= \int_0^{h_i} \left( -\alpha \frac{\partial u_h^{(n)}}{\partial X} \frac{\partial \phi_{local,2}}{\partial X} - \frac{u_h^{(n)}}{\Delta t} \phi_{local,2} + g(u_h^{(n)}) \phi_{local,2} + \frac{u_h^{(n-1)}}{\Delta t} \phi_{local,2} \right) dX \\ &\quad + \int_0^{h_{i+1}} \left( -\alpha \frac{\partial u_h^{(n)}}{\partial X} \frac{\partial \phi_{local,1}}{\partial X} - \frac{u_h^{(n)}}{\Delta t} \phi_{local,1} + g(u_h^{(n)}) \phi_{local,1} + \frac{u_h^{(n-1)}}{\Delta t} \phi_{local,1} \right) dX. \end{aligned}$$

Así la expresión anterior la podemos escribir como

$$F_i = F_{local,2}^{i-1} + F_{local,1}^i, \quad \text{para } i = 2, 3, \dots, m-1. \quad (4.39)$$

Luego, cuando  $i = 1$  e  $i = m$  tenemos

$$F_1 = F_{local,1}^1 = \int_0^{h_2} \left( -\alpha \frac{\partial u_h^{(n)}}{\partial X} \frac{\partial \phi_{local,1}}{\partial X} - \frac{u_h^{(n)}}{\Delta t} \phi_{local,1} + g(u_h^{(n)}) \phi_{local,1} + \frac{u_h^{(n-1)}}{\Delta t} \phi_{local,1} \right) dX - \alpha p$$

$$F_m = F_{local,2}^{m-1} = \int_0^{h_m} \left( -\alpha \frac{\partial u_h^{(n)}}{\partial X} \frac{\partial \phi_{local,2}}{\partial X} - \frac{u_h^{(n)}}{\Delta t} \phi_{local,2} + g(u_h^{(n)}) \phi_{local,2} + \frac{u_h^{(n-1)}}{\Delta t} \phi_{local,2} \right) dX + \alpha q.$$

Ensamblamos el vector  $F$  cuyas entradas están dadas por las ecuaciones (4.39) y las expresiones anteriores respectivamente:

$$\begin{aligned} F_1 &= F_{local,1}^1 - \alpha p, \\ F_i &= F_{local,2}^{i-1} + F_{local,1}^i, \quad \text{para } i = 2, 3, \dots, m-1. \\ F_m &= F_{local,2}^{m-1} + \alpha q. \end{aligned}$$

Sobre un elemento  $\Omega_i$ , las funciones de base diferentes de cero son  $\phi_i$  y  $\phi_{i+1}$ . Luego la integral del jacobiano (4.38) será distinta de cero en  $i$  e  $i+1$ , entonces las entradas del jacobiano distintas de cero son  $J_{i,i}$ ,  $J_{i,i+1}$ ,  $J_{i+1,i}$  y  $J_{i+1,i+1}$  y podemos almacenarlas en una matriz local  $2 \times 2$  que denotamos por:

$$J_{local}^i = \begin{bmatrix} J_{local,1,1}^i & J_{local,1,2}^i \\ J_{local,2,1}^i & J_{local,2,2}^i \end{bmatrix}.$$

Expresamos dichas integrales con las funciones de base locales, para  $i = 1, 2, \dots, m-1$ :

$$J_{i,i+1} = J_{i+1,i} = \int_0^{h_{i+1}} \left( -\alpha \frac{\partial \phi_{local,2}}{\partial X} \frac{\partial \phi_{local,1}}{\partial X} - \frac{\phi_{local,2}}{\Delta t} \phi_{local,1} + g(u_h^{(n)})' \phi_{local,2} \phi_{local,1} \right) dX, \quad (4.40)$$

también para  $i = 2, 3, \dots, m-1$  obtenemos

$$J_{i,i} = \int_0^{h_i} \left( -\alpha \left( \frac{\partial \phi_{local,2}}{\partial x} \right)^2 - \frac{(\phi_{local,2})^2}{\Delta t} + g(u_h^{(n)})' (\phi_{local,2})^2 \right) dX, \quad (4.41)$$

finalmente para  $i = 1$  e  $i = m$

$$J_{1,1} = \int_0^{h_2} \left( -\alpha \left( \frac{\partial \phi_{local,1}}{\partial x} \right)^2 - \frac{(\phi_{local,1})^2}{\Delta t} + g(u_h^{(n)})'(\phi_{local,1})^2 \right) dX, \quad (4.42)$$

$$J_{m,m} = \int_0^{h_m} \left( -\alpha \left( \frac{\partial \phi_{local,2}}{\partial x} \right)^2 - \frac{(\phi_{local,2})^2}{\Delta t} + g(u_h^{(n)})'(\phi_{local,2})^2 \right) dX. \quad (4.43)$$

De las ecuaciones (4.40), (4.41), (4.42) y (4.43) ensamblamos la matriz jacobiana  $J$  cuyas entradas se definen como:

$$\begin{aligned} J_{1,1} &= J_{local,1,1}^1 \\ J_{i,i+1} &= J_{i+1,i} = J_{local,1,2}^i \quad i = 1, 2, \dots, m-1 \\ J_{i,i} &= J_{local,2,2}^{i-1} + J_{local,1,1}^i \quad i = 2, \dots, m-1 \\ J_{m,m} &= J_{local,2,2}^{m-1} \end{aligned}$$

## 4.5. Aproximación de las integrales por medio de la cuadratura de Gauss-Legendre

La integral del vector local  $F$  y de la matriz local del jacobiano no pueden ser evaluadas explícitamente o incluso si pudieran ser evaluadas analíticamente, la integración puede ser tediosa, por tal razón, para aproximar dichas integrales usaremos la la cuadratura de Gauss-Legendre de cinco nodos (ver sección 1.1).

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \cong \sum_{m=1}^5 \omega_m f(x_m),$$

donde  $\omega_m$  son los pesos y  $x_m$  nodos.

Como sabemos, el intervalo de integración en general es  $[0, h_{i+1}]$  por lo que realizamos el cambio de variable correspondiente:

$$X = \frac{h_{i+1}}{2} + \frac{h_{i+1}}{2}y \quad (4.44)$$

con  $dX = \frac{h_{i+1}}{2} dy$ .

Expresamos las funciones de base locales en función de la nueva variable

$$\phi_{local,1}(y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y \quad (4.45)$$

$$\phi_{local,2}(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y \quad (4.46)$$

Por medio de las ecuaciones (4.44), (4.45) y (4.46) y por la cuadratura de Gauss-Legendre tenemos

$$\begin{aligned} F_i = \frac{h_{i+1}}{2} \sum_{p=1}^5 \omega_p \Big( & -\alpha \frac{\partial u_h^{(n)}(x_p)}{\partial X} \frac{\partial \phi_{local,2}(x_p)}{\partial X} - \frac{u_h^{(n)}(x_p)}{\Delta t} \phi_{local,2} + g(u_h^{(n)}(x_p)) \phi_{local,2} + \frac{u_h^{(n-1)}(x_p)}{\Delta t} \phi_{local,2}(x_p) \Big) \\ & - \alpha \frac{\partial u_h^{(n)}(x_p)}{\partial X} \frac{\partial \phi_{local,1}(x_p)}{\partial X} - \frac{u_h^{(n)}(x_p)}{\Delta t} \phi_{local,1}(x_p) + g(u_h^{(n)}(x_p)) \phi_{local,1}(x_p) + \frac{u_h^{(n-1)}(x_p)}{\Delta t} \phi_{local,1}(x_p) \Big). \end{aligned}$$

$$J_{i,i+1} = J_{i+1,i} = \frac{h_{i+1}}{2} \sum_{p=1}^5 \omega_p \Big( -\alpha \frac{\partial \phi_{local,2}}{\partial X} \frac{\partial \phi_{local,1}}{\partial X} - \frac{\phi_{local,2}}{\Delta t} \phi_{local,1} + g(u_h^{(n)})' \phi_{local,2} \phi_{local,1} \Big).$$

## 4.6. Algoritmo para calcular la solución por elementos finitos

El siguiente algoritmo resume los pasos básicos para el cálculo de la solución por elementos finitos  $u_h$ . Los resultados numéricos obtenidos de la implementación del algoritmo serán presentados en la siguiente sección.

**Entrada:** Partición del tiempo:  $0 = t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_N = T$ . Partición del espacio  $a = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_m = b$ . La estimación inicial  $u^{(0)}(x)$ . Condiciones de frontera de Neumann  $p, q$ . Coeficiente de difusión  $\alpha$ . Coeficiente de reacción  $\beta$ . Tolerancia  $tol$ .

**Salida :** La solución por elementos finitos  $u_h = (U_1, U_2, \dots, U_m)$ .

**para**  $n = 2$  **a**  $N$  **hacer**

*Calculamos  $\Delta T = t_n - t_{n-1}$*

*Ensamblamos el vector  $F$  con las condiciones de frontera impuestas, cuyas entradas son*

$$F_i = \int_a^b \left( -\alpha u_h^{(n)} \phi_i' + g(u_h^{(n)}) \phi_i - \frac{u_h^{(n)}}{\Delta T} \phi_i + \frac{u_h^{(n-1)}}{\Delta T} \phi_i \right) dx + \alpha \phi_i(b) q - \alpha \phi_i(a) p$$

$$g(u_h^{(n)}) = \beta u_h(1 - u_h)$$

$k = 0$

**mientras**  $\|F\| < tol$  **hacer**

*Ensamblamos la matriz Jacobina con entradas;*

$$J_{i,j} = \frac{\partial F_i}{\partial U_j^{(n)}} = \int_a^b \left( -\alpha \phi_j \phi_i' + g'(u_h) \phi_j \phi_i - \frac{\phi_j \phi_i}{\Delta T} \right) dx$$

$$g'(u_h^{(n)}) = \beta(1 - 2u_h^{(n)})$$

*Resolvemos el sistema*

$$J\delta = -F$$

*Establecemos*

$$u_h^{(n),k+1} = u_h^{(n),k} + \delta$$

donde  $u_h^{(n)}(x) = \sum_{j=1}^m U_j^{(n)} \phi_j(x)$

Ensamblamos nuevamente  $F$  y calculamos  $\|F\|$

Establecemos  $k = k + 1$ .

**fin**

**fin**

**Algoritmo 1:** Algoritmo por elementos finitos.

## 4.7. Resultados numéricos

En esta sección presentamos los resultados numéricos de las simulaciones hechas en MATLAB, para las cuales hemos considerado seis casos: con condiciones de frontera de Neumann, los problemas (4.47), (4.48) extraídos de [35] y el problema (4.49) extraído de [36]. Con condiciones de Dirichlet, el problema (4.50) extraído de [33] y finalmente los problemas (4.51) y (4.52) extraídos de [2] y [11] respectivamente teniendo como dato las soluciones analíticas de las cuales las condiciones iniciales y de frontera son obtenidas directamente.

### Caso I

Consideremos el PVIF con condiciones de frontera de Neumann

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u(1 - u), & x \in (0, 1) \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0, & t \in [0, T] \\ u(x, 0) = \cos^2(\pi x). \end{cases} \quad (4.47)$$

En la Fig. 4.3 hemos aproximado la solución del problema (4.47) por medio de elementos finitos teniendo como datos el coeficiente de difusión  $\alpha = 1.0$ , el coeficiente de reacción  $\beta = 1.0$ , un tiempo  $T = 5$  y una condición inicial  $u_0(x) = \cos^2(\pi x)$ , con incrementos  $\Delta t = 0.1$ ,  $h = 0.05$ , por lo que la solución numérica se muestra para diferentes valores del tiempo  $t$ . En la Fig. 4.4 mostramos la comparación del método de elementos finitos desarrollado y solución aproximada resultante de la función *pdepe()* proporcionado por MATLAB PDE Toolbox para resolver EDPs 1D, como se puede ver en el apéndice A.



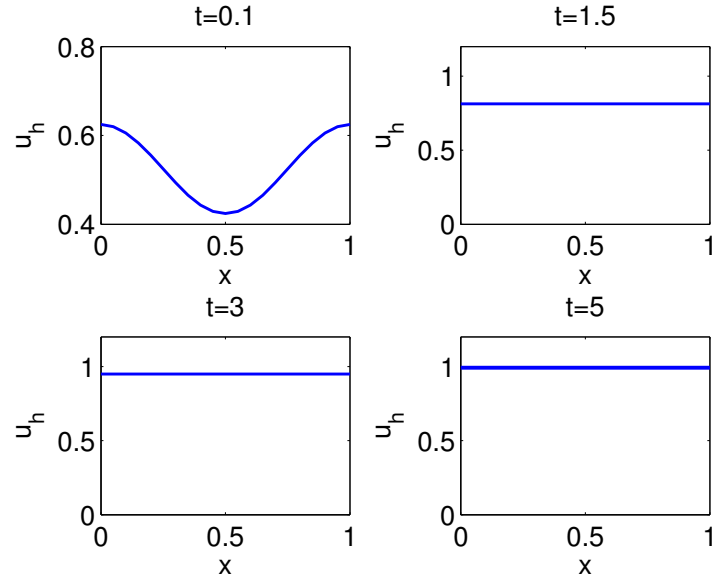


Figura 4.3: Solución aproximada usando la condición inicial  $u_0(x) = \cos^2(\pi x)$  con un periodo de tiempo  $0 \leq t \leq 5$  para instantes de tiempo  $t = 0.1, 1.5, 3, 5$ .

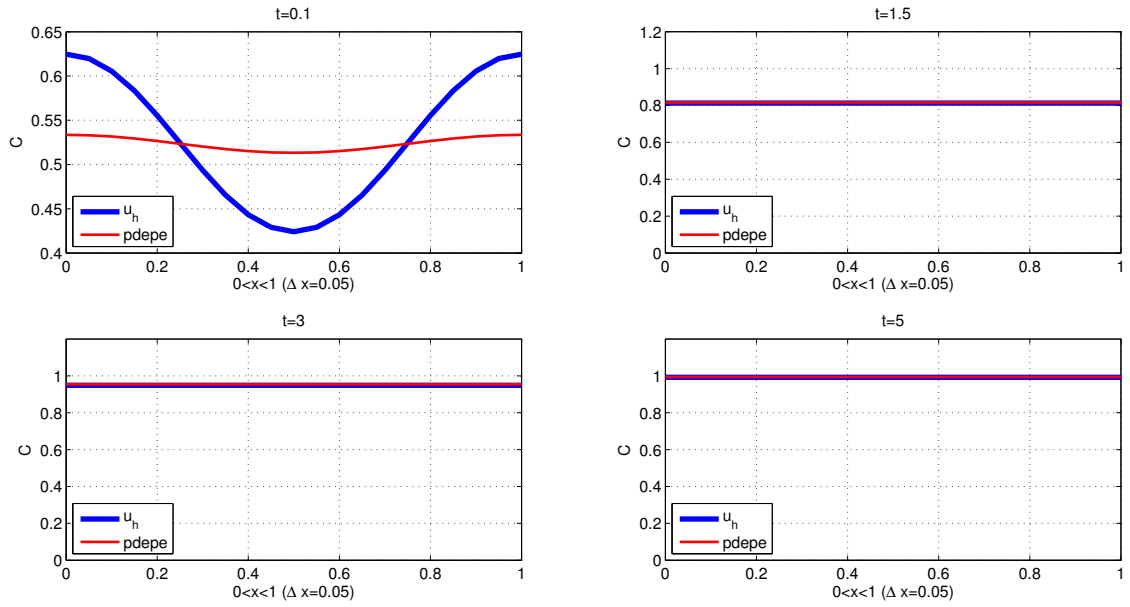
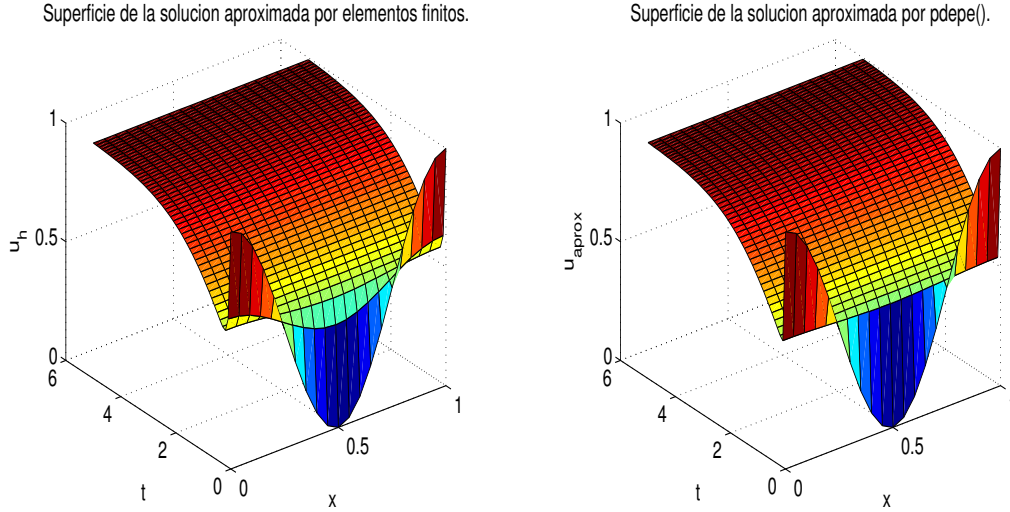


Figura 4.4: Comparación de la solución obtenida por el método de elementos finitos y las solución obtenida por la función  $pdepe()$  con un periodo de tiempo  $0 \leq t \leq 5$  para los instantes de tiempo indicados.

En las Figuras 4.5a, 4.5b mostramos en 3D, el comportamiento de las soluciones aproximadas obtenidas por el método de elementos finitos y la función  $pdepe()$ . La principal diferencia ocurre en el tiempo  $t_2 = 0.1$  como también se ve en las figuras anteriores, si aumentamos los incrementos del tiempo, es decir,  $\Delta t = 0.01$ ,  $\Delta t = 0.001$  manteniendo fijo el incremento del espacio  $h = 0.05$  mejora la aproximación, en particular para  $t_2$ .



(a) Solución numérica por elementos finitos. (b) Solución numérica mediante la función  $pdepe()$ .

Figura 4.5: Soluciones aproximadas en 3D de la ec. (4.47):  $0 \leq x \leq 1$ ,  $h = 0.05$ ,  $0 \leq t \leq 5$  y  $\Delta t = 0.1$ .

## Caso II

Consideremos el PVIF también con condiciones de frontera de Neumann

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u(1 - u), & x \in (0, 1) \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0, & t \in [0, T] \\ u(x, 0) = \frac{\cos^2(\pi x)}{10}. \end{cases} \quad (4.48)$$

Este caso es similar al anterior, solo hemos variado la condición inicial  $u_0(x) = \frac{\cos^2(\pi x)}{10}$ . Tomamos los mismos incrementos  $\Delta t = 0.1$ ,  $h = 0.05$ , la solución aproximada se muestra para diferentes

valores de  $t$  como se puede ver en la Fig. 4.6, también hemos realizado la comparación de las soluciones por el método de elementos finitos y *pdepe()* como se puede apreciar en la Fig. 4.7.

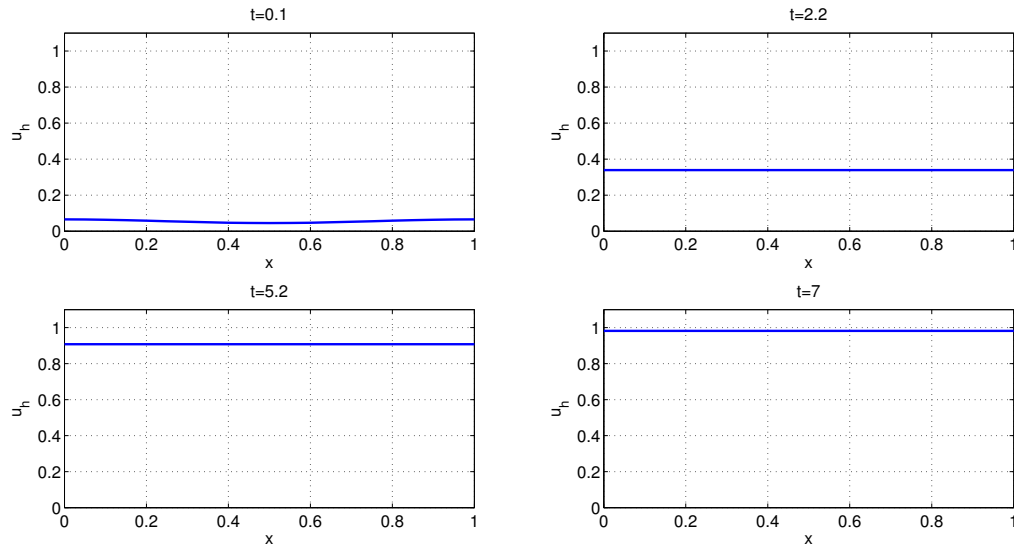


Figura 4.6: Solución aproximada usando la condición inicial  $u_0(x) = \frac{\cos^2(\pi x)}{10}$  con un periodo de tiempo  $0 \leq t \leq 7$  para  $t = 0.1, 2.2, 5.2, 7$ .

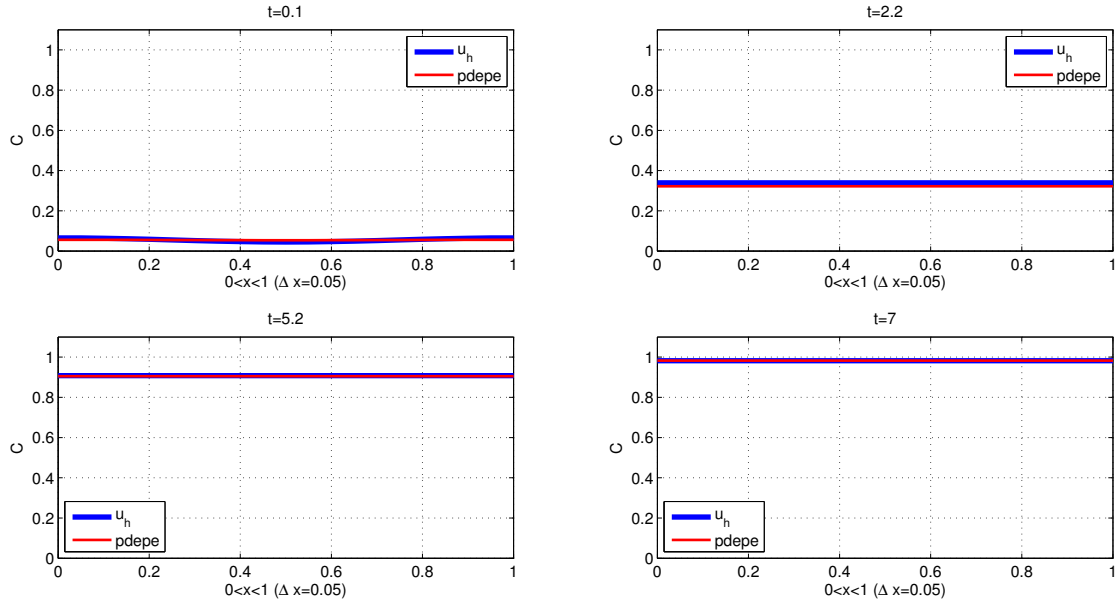
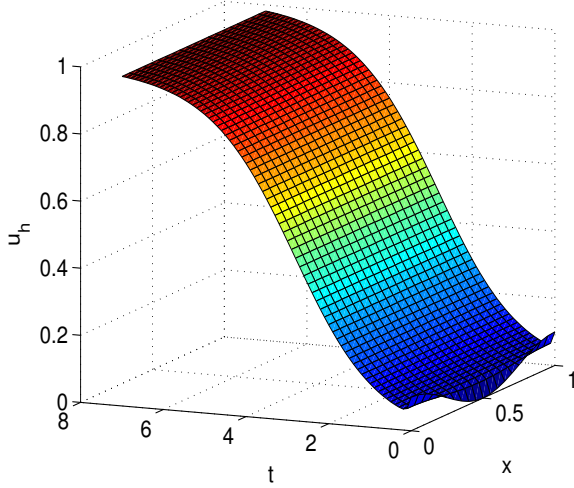


Figura 4.7: Comparación de la solución obtenida por método de elementos finitos y la función  $pdepe()$  con un periodo de tiempo  $0 \leq t \leq 7$  para los instantes de tiempo indicados.

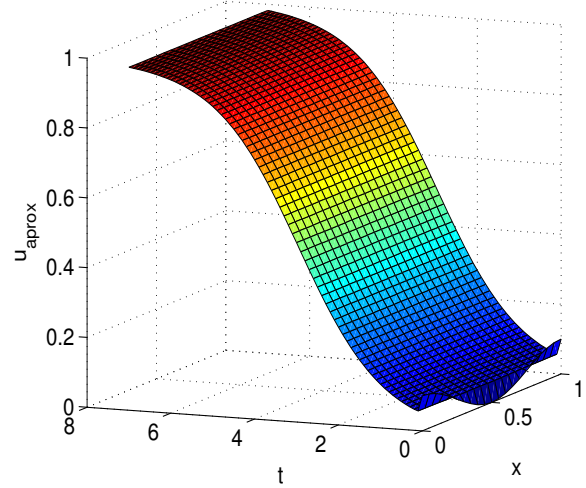
A continuación, en la Figura 4.8 se muestra el comportamiento en 3D de las soluciones aproximadas. Observamos que para un incremento  $\Delta t = 0.1$  tenemos una buena aproximación.

Superficie de la solución aproximada por elementos finitos.



(a) Solución numérica por elementos finitos.

Superficie de la solución aproximada por pdepe().



(b) Solución numérica mediante la función *pdepe()*.

Figura 4.8: Soluciones aproximadas en 3D de la ec. (4.48):  $0 \leq x \leq 1$ ,  $h = 0.05$ ,  $0 \leq t \leq 7$  y  $\Delta t = 0.1$ .

### Caso III

Consideremos el PVIF con condiciones de frontera de Neumann

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u(1 - u), & x \in (-1, 10) \\ u_x(-1, t) = u_x(10, t) = 0, & t \in [0, 10) \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (4.49)$$

con

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x \leq 0 \\ 0, & 0 < x < 10. \end{cases}$$

También como en los casos anteriores, tenemos los mismos coeficientes de difusión  $\alpha = 1.0$  y reacción  $\beta = 1.0$ , pero la condición inicial es una función discontinua. Para incrementos  $\Delta t = 0.1$  y  $h = 0.5$  tenemos la Figura 4.9 y de forma similar comparamos la solución aproximada por elementos finitos y la solución numérica de MATLAB como se muestra en la Figura 4.10.

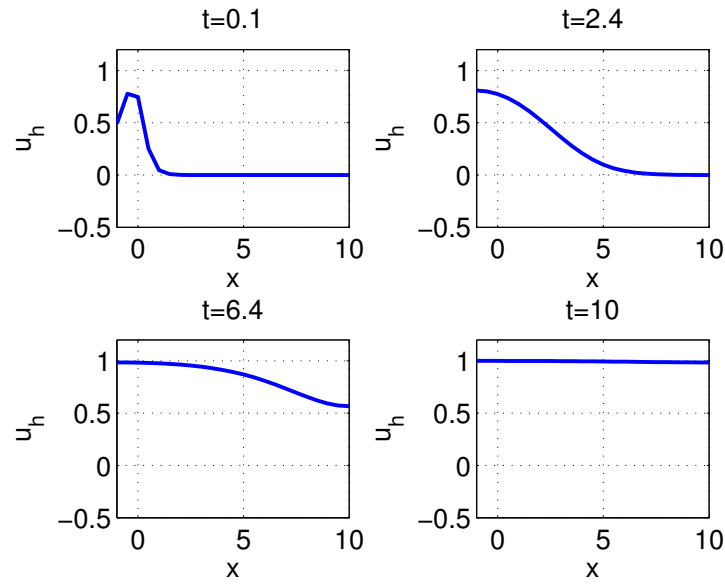


Figura 4.9: Solución aproximada con un periodo de tiempo  $0 < t < 10$  para  $t = 0.1, 2.4, 6.4, 10$ .

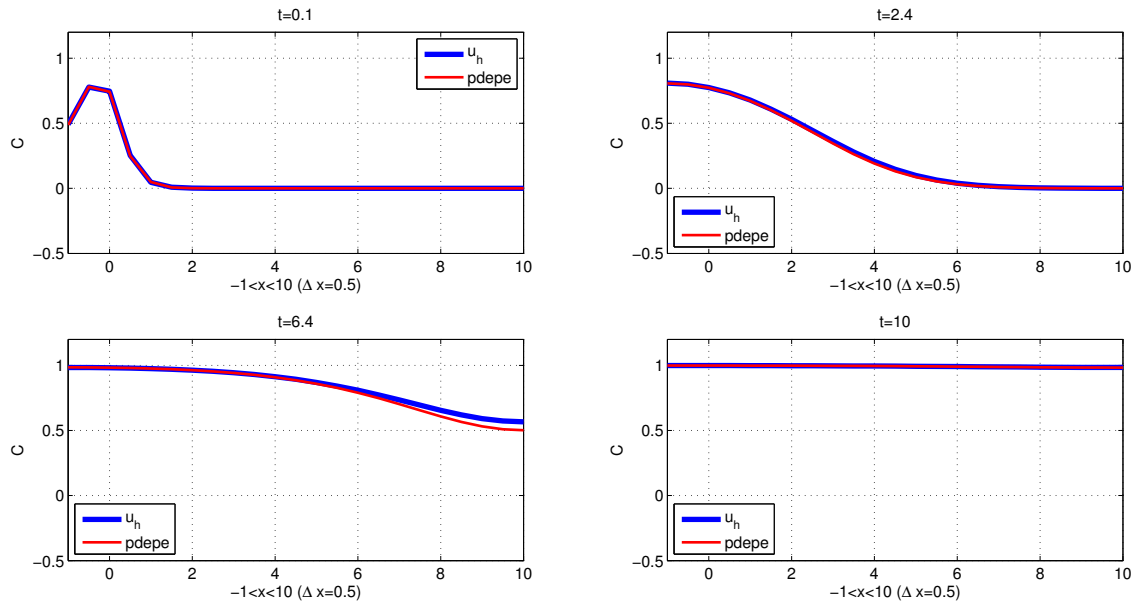
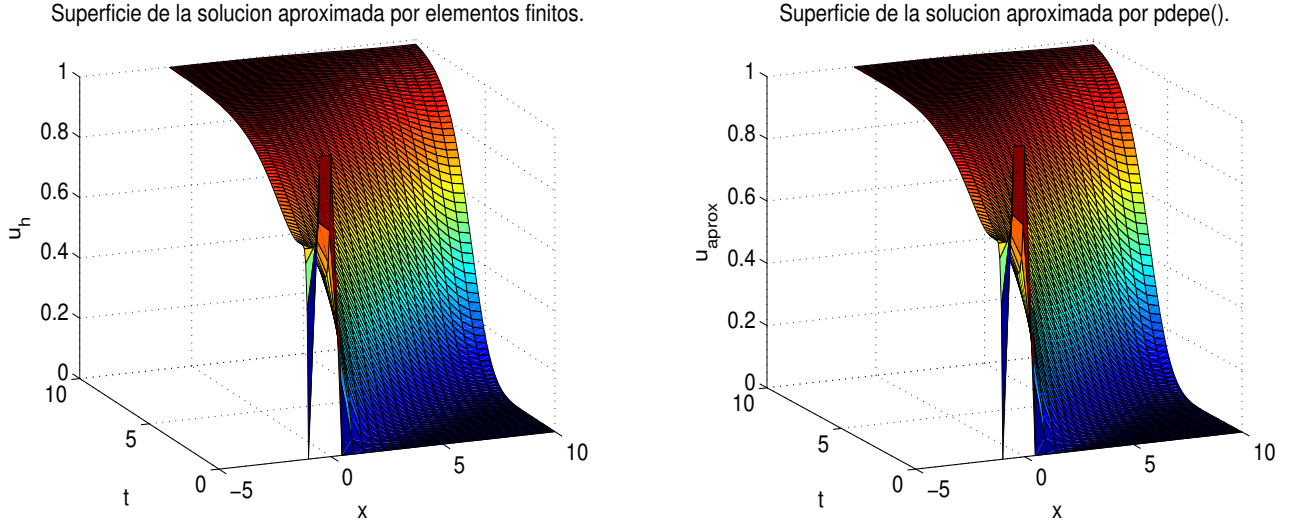


Figura 4.10: Comparación de la solución obtenida por método de elementos finitos y la función  $pdepe()$  con un periodo de tiempo  $0 < t < 10$  para los instantes de tiempo indicados.

Las Figuras 4.11a, 4.11b muestran el comportamiento de la solución aproximada en 3D por elementos finitos y *pdepe()* respectivamente. Para los incrementos  $\Delta t = 0.1$  y  $h = 0.5$  observamos una buena aproximación del método de elementos finitos, sin embargo cuando aumentamos el incremento del tiempo, manteniendo fijo el tamaño de paso del espacio, este comportamiento cambia, en ese caso debemos refinar la malla espacial para tener el comportamiento esperado.



(a) Solución numérica por elementos finitos.

(b) Solución numérica mediante la función *pdepe()*.

Figura 4.11: Soluciones aproximadas en 3D de la ec. (4.49):  $-1 < x < 10$ ,  $h = 0.5$ ,  $0 \leq t < 10$  y  $\Delta t = 0.1$ .

De las Figuras 4.3, 4.6, 4.9 correspondientes a los casos I, II y III respectivamente, observamos que las soluciones aproximadas obtenidas por el método de elementos finitos permanecen dentro de un intervalo unitario, es decir,  $0 \leq u_h(x, t) \leq 1$ , esto comprueba que la solución de la ecuación de Fisher siempre se mantendrá dentro de dicho intervalo, además se ve claramente que las soluciones parecen converger hacia el valor de 1 a medida que incrementa  $t$ .

## Caso IV

Consideremos el PVIF con condiciones de frontera de Dirichlet

$$\begin{cases} u_t = 0.1u_{xx} + u(1 - u), & -l < x < l, t > 0 \\ \lim_{|x| \rightarrow l} u(x, t) = 0, \\ u(x, 0) = \text{sech}^2(10x). \end{cases} \quad (4.50)$$

En este caso los valores de difusión y reacción son  $\alpha = 0.1$ ,  $\beta = 1.0$  respectivamente. En la Figura 4.12 presentamos la aproximación por elementos finitos para un dominio espacial de  $-4 < x < 4$  con un tamaño de paso  $h = 0.02$  y un tiempo  $0 < t < 0.2$  con  $\Delta t = 0.05$ , podemos ver que cerca de  $x = 0$ ,  $u_h(x, t)$  alcanza un valor máximo y luego decae rápidamente. La Figura 4.13 presenta la comparación realizada con *pdepe()*.

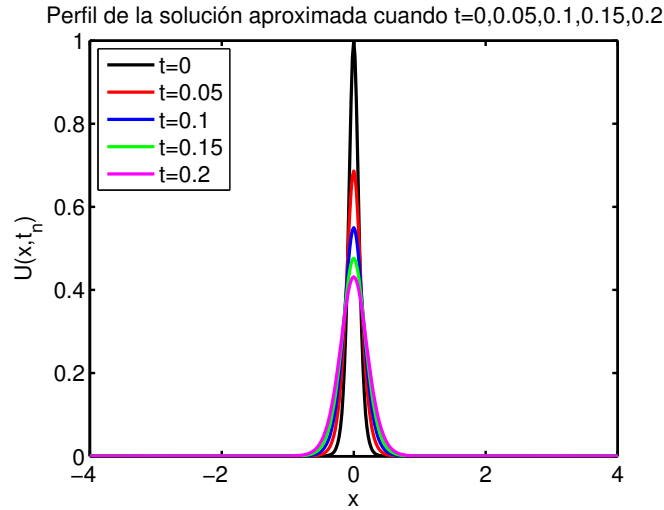


Figura 4.12: Solución aproximada con un periodo de tiempo  $0 < t < 0.2$  para  $t = 0, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2$ .



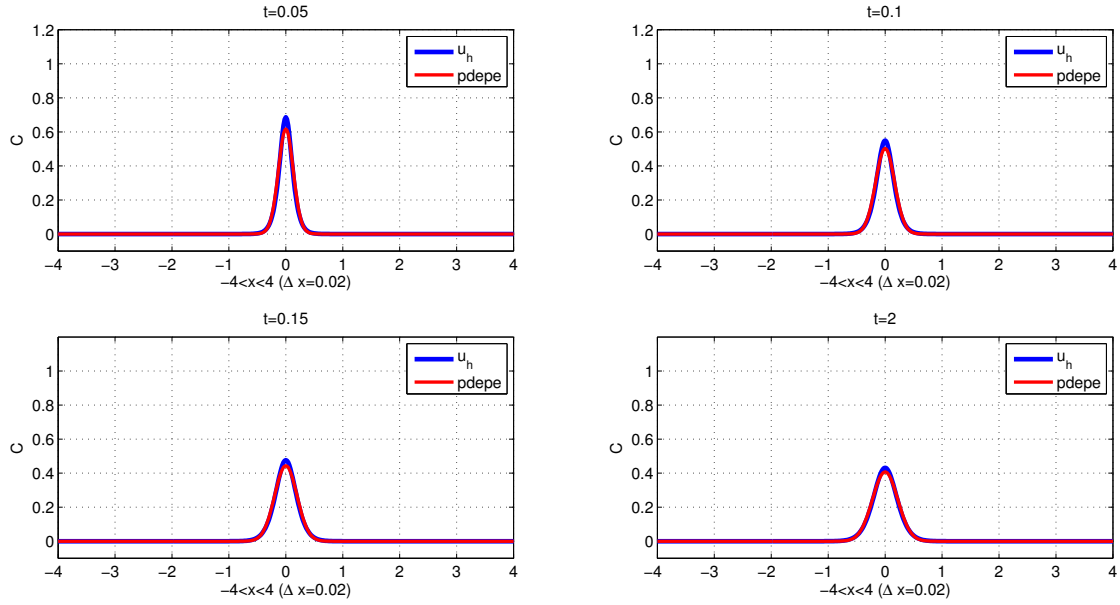


Figura 4.13: Comparación de la solución obtenida por método de elementos finitos y la función  $pdepe()$  con un periodo de tiempo  $0 < t < 0.2$  para los instantes de tiempo indicados.

Veamos a continuación cómo el coeficiente de difusión influye en el comportamiento de la solución aproximada por elementos finitos.

Para  $\alpha = 0.05$  en la Figura 4.14, vemos que la aproximación por elementos finitos está por encima de la solución aproximada esperada, mientras que para  $\alpha = 0.12$  mejora el comportamiento de la solución aproximada por elementos finitos como se observa en la Figura 4.15 en comparación con  $\alpha = 0.1$ .

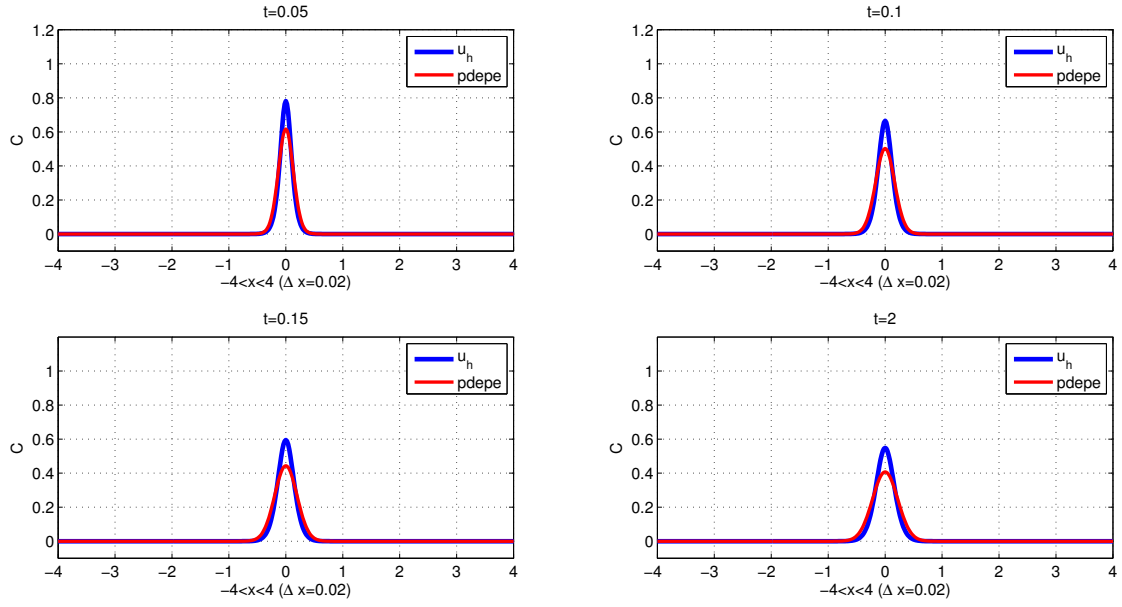


Figura 4.14: Solución aproximada con  $\alpha = 0.05$ ,  $-4 < x < 4$  y  $0 < t < 0.2$ .

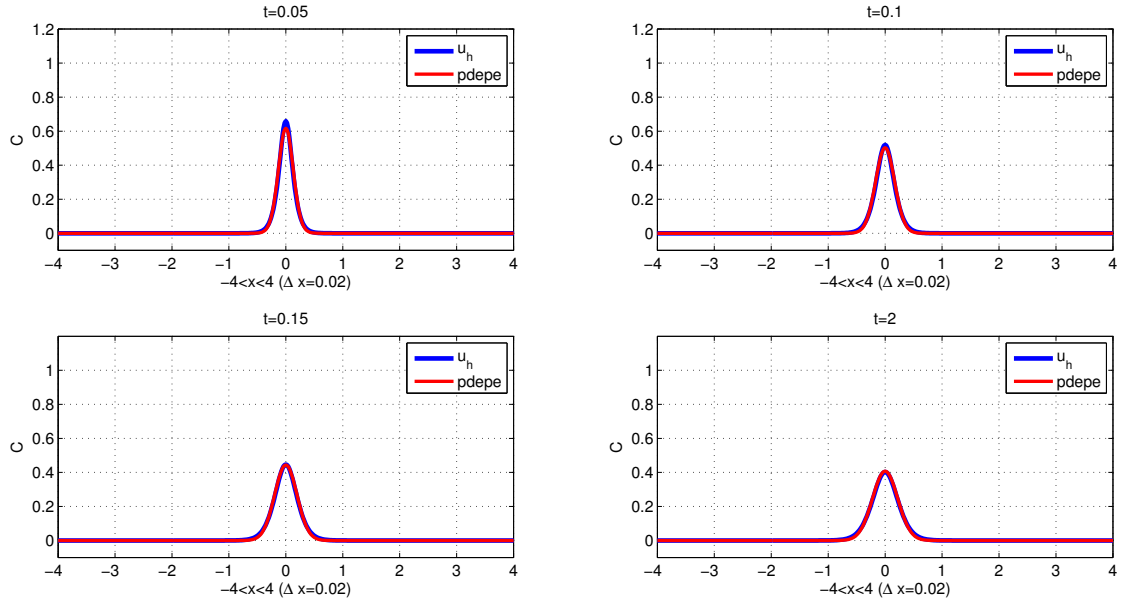


Figura 4.15: Solución aproximada con  $\alpha = 0.12$ ,  $-4 < x < 4$  y  $0 < t < 0.2$ .

Si tomamos un coeficiente de difusión mayor que 0.1 como por ejemplo  $\alpha = 0.5$ , la aproximación por elementos finitos está por debajo de la solución esperada como se ve en la Figura 4.16

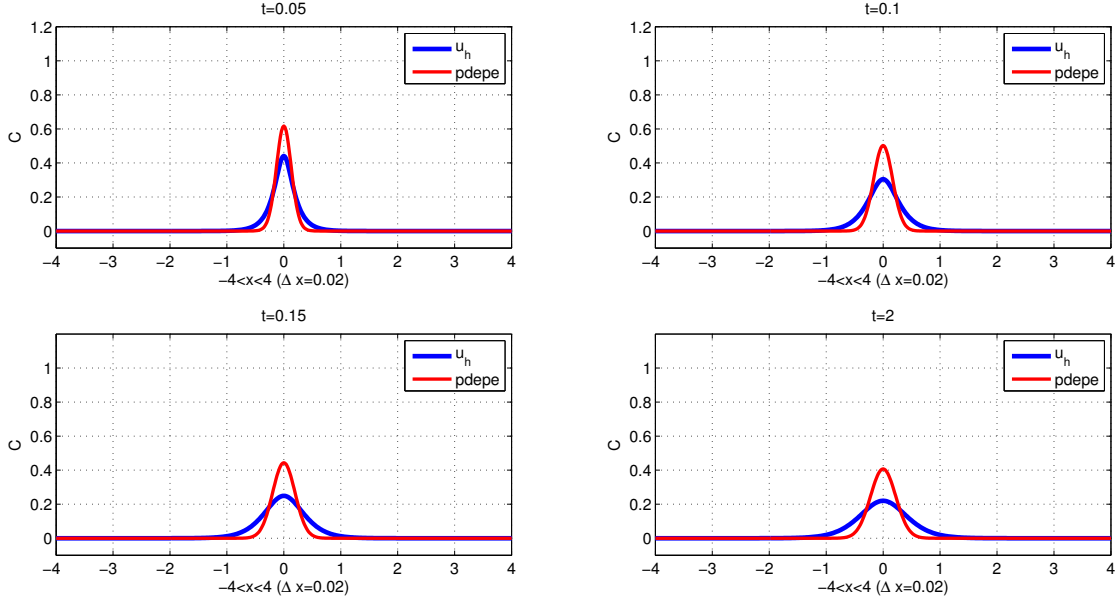


Figura 4.16: Solución aproximada con  $\alpha = 0.5$ ,  $-4 < x < 4$  y  $0 < t < 0.2$ .

Ahora mostramos la Figura 4.17 en un periodo de tiempo  $0 < t < 5$  con un incremento  $\Delta t = 0.5$  y un dominio espacial  $-10 < x < 10$  con el mismo tamaño de paso  $h = 0.2$ . En la Figura 4.18 mostramos la comparación realizada con la función  $pdepe()$ .

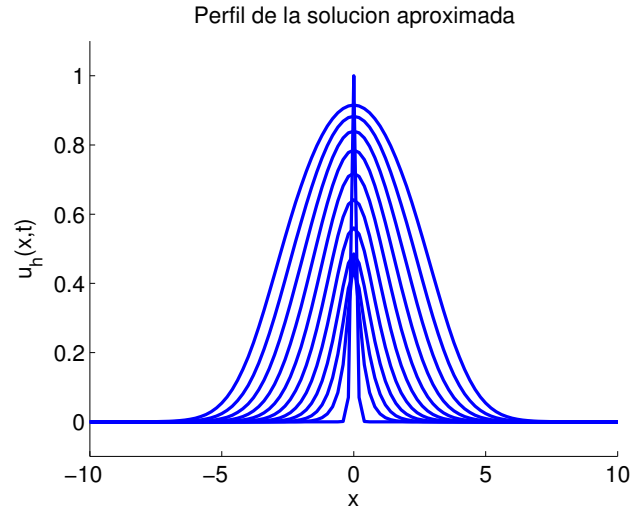


Figura 4.17: Solución aproximada con un periodo de tiempo  $0 < t < 5$ .

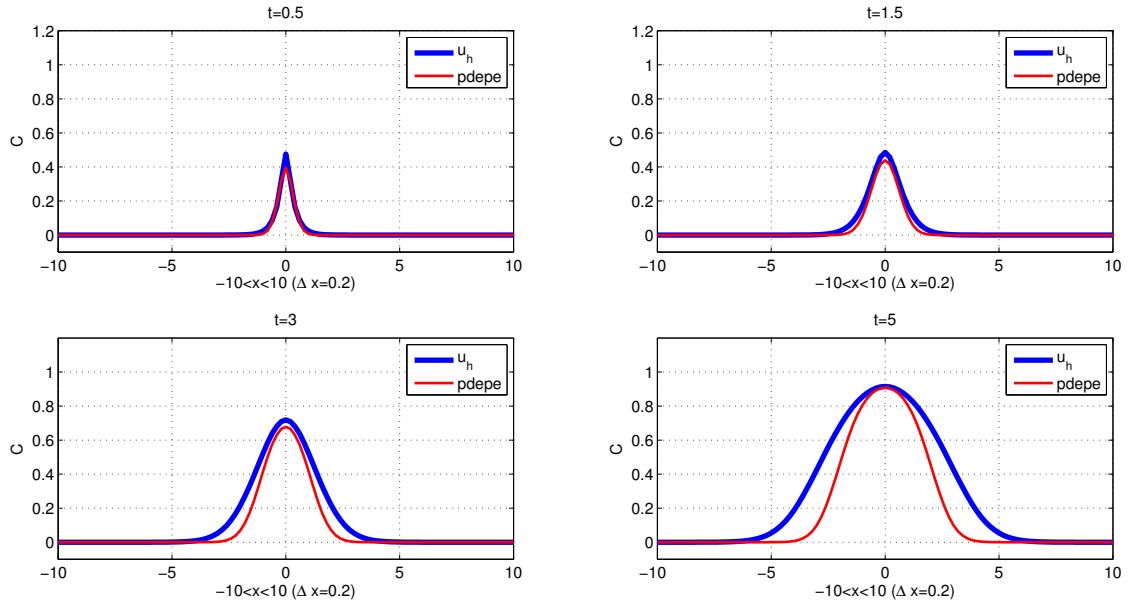
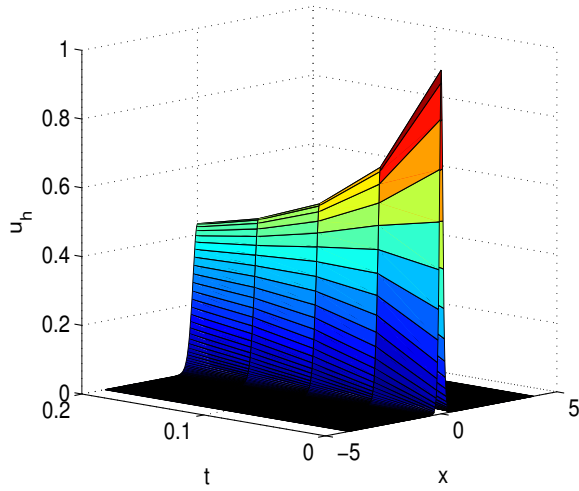


Figura 4.18: Comparación de la solución obtenida por método de elementos finitos y la función  $pdepe()$  con un periodo de tiempo  $0 < t < 5$  para los instantes de tiempo indicados.

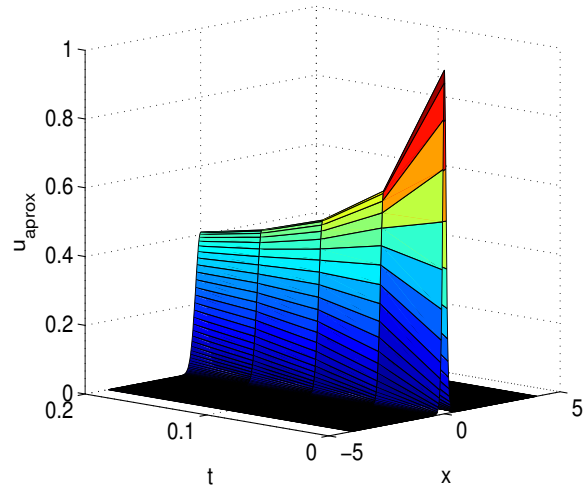
Análogamente, mostramos las superficies de las soluciones aproximadas por elementos finitos y  $pdepe()$ , para el intervalo  $-4 < x < 4$  con incremento  $h = 0.02$  y  $0 < t < 0.2$  con  $\Delta t = 0.05$ .

Superficie de la solución aproximada por elementos finitos.



(a) Solución numérica por elementos finitos.

Superficie de la solución aproximada por pdepe().

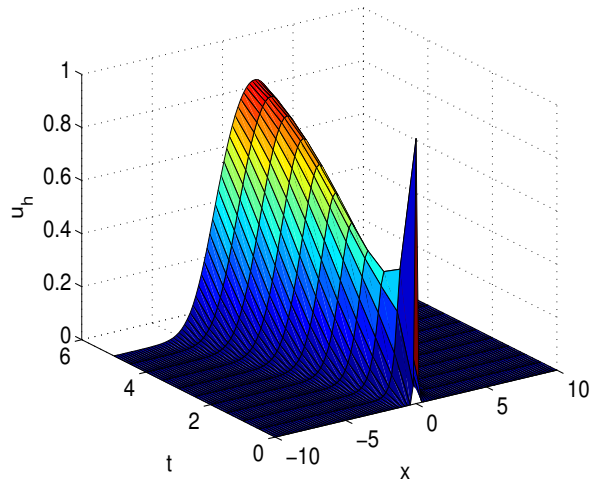


(b) Solución numérica mediante la función *pdepe()*.

Figura 4.19: Soluciones aproximadas en 3D de la ec. (4.50):  $-4 < x < 4$ ,  $h = 0.02$ ,  $0 < t < 0.2$  y  $\Delta t = 0.05$ .

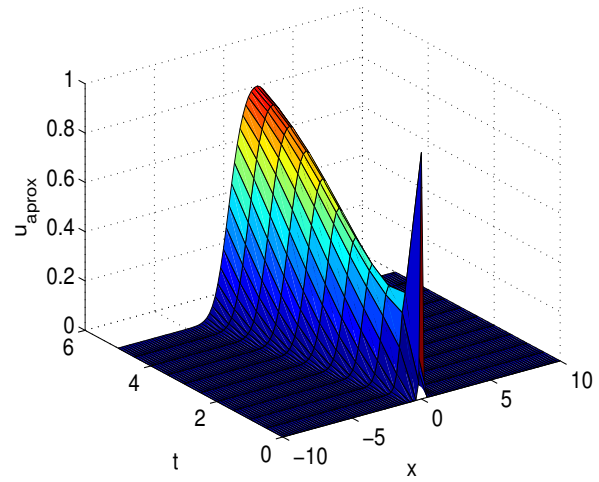
También se muestran las superficies de las soluciones aproximadas por elementos finitos y *pdepe()*, para el intervalo  $-10 < x < 10$  con incremento  $h = 0.2$  y  $0 < t < 5$  con  $\Delta t = 0.5$ .

Superficie de la solución aproximada por elementos finitos.



(a) Solución numérica por elementos finitos.

Superficie de la solución aproximada por pdepe().



(b) Solución numérica mediante la función *pdepe()*.

Figura 4.20: Soluciones aproximadas en 3D de la ec. (4.50):  $-10 < x < 10$ ,  $h = 0.2$ ,  $0 \leq t \leq 5$  y  $\Delta t = 0.5$ .

Observamos de las Figuras 4.13 y 4.18, para un coeficiente de difusión  $\alpha = 0.1$ , la aproximación por elementos finitos es mejor en los intervalos  $-4 < x < 4$  y  $0 < t < 0.2$  que tomando los intervalos  $-10 < x < 10$  y  $0 < t < 5$ .

## Caso V

Consideremos el problema

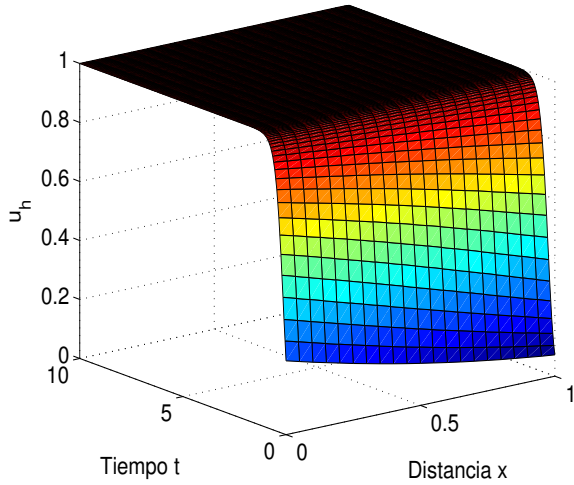
$$u_t = u_{xx} + 6u(1 - u) \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (4.51)$$

la solución exacta está dada por

$$u(x, t) = \left( \frac{1}{1 + e^{x-5t}} \right)^2.$$

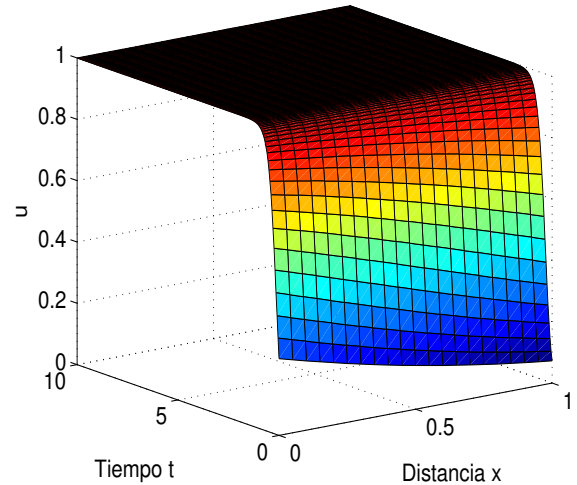
En la Figura 4.21a mostramos la superficie de la solución por elementos finitos y en la Figura 4.21b mostramos la superficie de la solución exacta. En ambos tenemos un dominio espacial de  $0 \leq x \leq 1$  con un tamaño de paso  $h = 0.05$ ,  $\Delta T = 0.05$  y con un coeficiente de reacción  $\beta = 6$ .

Superficie de la solución aproximada por elementos finitos.



(a) Solución numérica por elementos finitos.

Superficie de la solución exacta.



(b) Solución analítica .

Figura 4.21: Soluciones en 3D de la ec. (4.51):  $0 \leq x \leq 1$ ,  $h = 0.05$ ,  $0 \leq t \leq 10$  y  $\Delta t = 0.05$ .

## Caso VI

Finalmente, consideremos el problema

$$u_t = u_{xx} + u(1 - u) \quad -5 < x < 10, \quad 0 < t < 5, \quad (4.52)$$

cuya la solución exacta está dada por

$$u(x, t) = \frac{1}{\left(1 + (\sqrt{2} - 1)e^{\frac{x}{\sqrt{6}} - \frac{5}{6}t}\right)^2}$$

En este caso volvemos a tener como coeficiente de difusión  $\alpha = 1.0$  y reacción  $\beta = 1.0$ . La solución exacta satisface la ecuación (4.52) por lo que deducimos la condición inicial y las condiciones de frontera de tipo Dirichlet. En la Figura 4.22, mostramos la comparación de la solución exacta con la solución aproximada obtenida por elementos finitos, en un intervalo  $-5 < x < 10$  con un tamaño de paso  $h = 0.5$ , y un incremento  $\Delta t = 0.5$ .

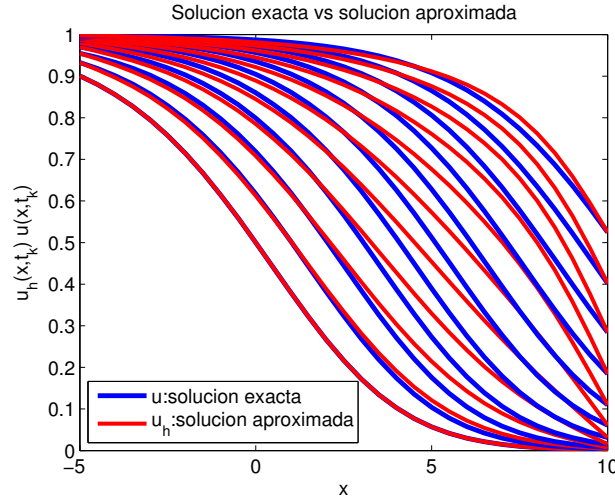
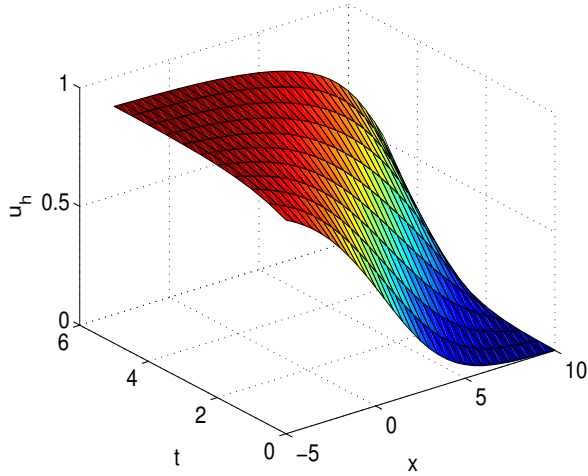


Figura 4.22: Comparación de la solución exacta con la solución aproximada por el método de elementos finitos, para un periodo de tiempo  $0 < t < 5$ .

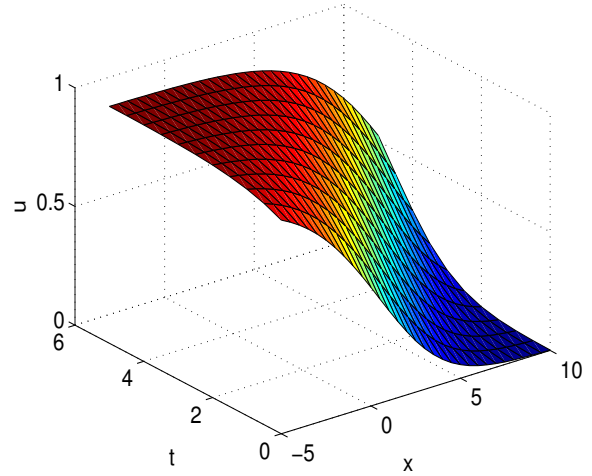
En la Figura 4.23 mostramos las superficies de la solución aproximada y la solución exacta:

Superficie de la solución aproximada por elementos finitos.



(a) Solución numérica por elementos finitos.

Superficie de la solución exacta.



(b) Solución analítica.

Figura 4.23: Soluciones en 3D de la ec. (4.52):  $-5 < x < 10$ ,  $h = 0.5$ ,  $0 < t < 5$  y  $\Delta t = 0.5$ .

Ahora calculamos los errores absolutos de la solución aproximada por elementos finitos y la solución analítica obteniéndose

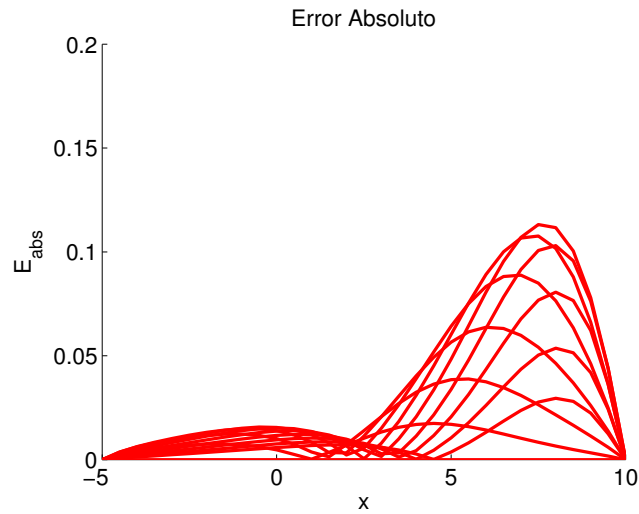


Figura 4.24: Error absoluto  $|u_h(x_i, t_i) - u(x_i, t_i)|$ , con  $h = 0.5$  y  $\Delta t = 0.5$ .

A continuación consideramos incrementos  $h = 0.125$ ,  $\Delta t = 0.015625$  y calculamos nuevamente los errores absolutos como se muestra en la Figura 4.25.



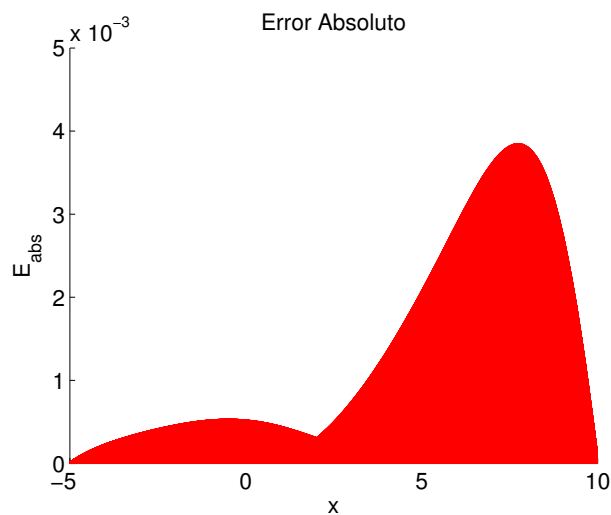


Figura 4.25: Error absoluto:  $|u_h(x_i, t_i) - u(x_i, t_i)|$ , con  $h = 0.125$  y  $\Delta t = 0.015625$ .

De los errores absolutos calculados, en la Figura 4.25 se aprecia que al refinar la malla espacial con un incremento  $h = 0.125$  tenemos 121 nodos y tomando un incremento de  $\Delta t = 0.015625$  en el tiempo, el error absoluto es menor que  $5 \times 10^{-3}$  mientras que en la Figura 4.24 se aprecia que con incrementos de  $h = 0.5$ , es decir, 31 nodos en la malla espacial y  $\Delta t = 0.5$  el error absoluto es menor que 0.1, esto nos sugiere que refinando el espacio y el tiempo podemos reducir el error entre la solución aproximada y la solución exacta.

# Capítulo 5

## Conclusiones

El método de elementos finitos es usado generalmente para discretizar el espacio. En el caso de las ecuaciones de evolución se tiene como variable independiente al tiempo, por lo que surgen algunas estrategias para discretizar el tiempo, como son:

1. Por medio de diferencias finitas aproximar la derivada del tiempo y llegar a un conjunto recursivo de problemas continuos en el espacio que pueden discretizarse por elementos finitos.
2. Discretizar primero el espacio por elementos finitos y luego resolver el sistema de EDOs resultante con algún método numérico.

Ambas formas llegan a un sistema de ecuaciones a resolver, en esta tesis se abordó la primera forma. Aplicamos el método de elementos finitos a una ecuación de reacción-difusión no lineal unidimensional como es la ecuación de Fisher, por ser una ecuación diferencial parcial parabólica no lineal.

Esta estrategia tomada para resolver la ecuación de Fisher es la más eficiente, porque nos proporciona un mejor control de las variables en la implementación, además las propias estrategias en sí de solución por elementos finitos a menudo están disponibles, mientras que por la segunda forma generalmente se recurre a rutinas que resuelven las EDOs resultantes, pero que podrían tener limitaciones cuando extendemos a problemas de mayor dimensión, lo que no ocurriría con la primera forma, como sabemos, los elementos finitos son eficientes en problemas  $2D$  y  $3D$  aún con dominios

complejos.

En cuanto a los resultados obtenidos por el método de elementos finitos, los cuatro primeros casos se validó con las soluciones numéricas obtenidas mediante la función *pdepe()* de MATLAB y en los dos casos restantes se validó con sus respectivas soluciones analíticas. Concluimos que las soluciones aproximadas por elementos finitos se acercan casi bien a las soluciones obtenidas de MATLAB y a las soluciones exactas, además que las soluciones aproximadas por elementos finitos permanece dentro del intervalo unitario, lo que corrobora la propiedad que tienen las soluciones de onda viajera para las cuales están entre  $0 \leq u(x, t) \leq 1$ .

La contribución de esta tesis, consiste en haber desarrollado este enfoque para obtener soluciones aproximadas de la ecuación de Fisher, pues, hasta donde se investigó, no se encontró un desarrollo similar. Esta metodología puede aplicarse a problemas de leyes de conservación como es la ecuación de Burger:

$$u_t = vu_{xx} + uu_x,$$

además se puede extender a la resolución de otras EDPs no lineales como la ecuación de convección-difusión-reacción:

$$u_t = -u_x + u_{xx} + f(u).$$

Sin embargo, cabe resaltar, que podría investigarse cómo mejorar la eficiencia y la precisión de los resultados con el propósito de preservar las principales características de las soluciones de onda viajera, lo que conlleva a la realización de trabajos futuros.

# Apéndice A

## Una breve descripción de EDPs no lineales con MATLAB

### Introducción

Actualmente computación científica implica formular modelos matemáticos y obtener sus soluciones numéricas por medio de computadoras o supercomputadoras, con el uso de lenguajes de programación o paquetes de software que mejor se adapten a cada tarea.

Para esos fines, existen diversas opciones de lenguajes de programación, principalmente como Fortran, C, C++, MATLAB, Python, JavaScript, entre otros. Sin embargo la elección del tipo de lenguaje de programación puede estar influenciada por la disponibilidad del software o una cuestión de preferencia personal del programador.

Cada uno de ellos tiene sus ventajas y desventajas, por ejemplo, hay una gran cantidad de algoritmos científicos de alta calidad disponibles en Fortran, a su vez proporciona una implementación sencilla y eficiente de arreglos multidimensionales mientras que en C es tedioso dicha implementación. Por otro lado, Python tiene una biblioteca bien desarrollada para computación científica, mientras que JavaScript es lo contrario, pues sus tipos de datos numéricos son limitados y su capacidad de depuración primitiva, su principal ventaja es que sus archivos ejecutables se pueden incorporar a los archivos HTML.

MATLAB, más que un lenguaje, es un entorno de programación interactiva para computación científica. Los resultados de sus instrucciones se pueden ver sin necesidad de pasar por un compilador como en otros lenguajes. A continuación mencionaremos algunas características importantes:

1. Es un lenguaje de programación de alto nivel y orientado a objetos.
2. El lenguaje de MATLAB es un lenguaje matricial.
3. Proporciona un potente cálculo numérico integrado.
4. Posee sistema gráfico en 2D, 3D en su entorno de programación, además de procesamiento de imágenes, animación, etc.
5. Posee cálculo simbólico vía SYMBOLIC MATH TOOLBOX.
6. Proporciona modelado, simulación y análisis de sistemas dinámicos mediante Simulink en un entorno de interfaz gráfico de usuario (GUI).
7. Posee una API (Application Programming Interface) que permite escribir programas en C, C++, Fortran que interactúan con MATLAB.
8. Está disponible casi para todos los sistemas operativos.
9. Permite la creación de programas a pequeña escala así como la creación de programas grandes y complejos.

### **Algunas desventajas de MATLAB**

- En la mayoría de casos, los programas a gran escala se ejecutan significativamente más rápido en los lenguajes C y Fortran que en MATLAB.
- Cada pieza de datos se almacena internamente como una matriz.
- Las conversiones de tipo de datos son automáticas y podrían aumentar el costo computacional.
- La depuración de las excepciones de punto flotante puede ser difícil.
- No es un software libre.

## Solución numérica de EDPs no lineales con MATLAB

MATLAB tiene incorporado Partial Differential Equation Toolbox que resuelve muchas ecuaciones diferenciales parciales lineales y no lineales, por ejemplo:

- EDPs no lineales en una dimensión espacial como las ecuaciones de Fisher y Burges.
- Sistemas de EDPs no lineales en una dimensión espacial como las ecuaciones de Fitz-Hugh-Nagumo.
- EDPs elípticas no lineales en dos dimensiones como la ecuación de Poisson no lineal.

En esta sección realizaremos una breve introducción para resolver EDPs 1D mediante la función predefinida *pdepe*. Esta función resuelve PVIF para problemas parabólicos-elípticos lineales y no lineales. MATLAB resuelve una EDP unidimensional de la forma siguiente:

$$c\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial u}{\partial t} = x^{-m} \frac{\partial}{\partial x} \left[ x^m f\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \right] + s\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

con un dominio

$$D = \{a \leq x \leq b, t_0 \leq t \leq t_f\},$$

donde

- $u(x, t)$  es un campo vectorial.
- $f\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$  es el flujo.
- $s\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$  es el término fuente.
- $m$  es un parámetro asociado con la geometría del problema, donde  $m = 0$  corresponde a las coordenadas cartesianas,  $m = 1$  a cilíndricas y  $m = 2$  esféricas.
- $c\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$  es una matriz diagonal. Los elementos de esta matriz son idénticamente cero o positivos. Un elemento que es idénticamente cero corresponde a una ecuación elíptica, de lo contrario a una ecuación parabólica.

La condición inicial usualmente está definida como

$$u(x, t_0) = u_0(x).$$

Las condiciones de frontera deben ser especificadas como

$$\begin{aligned} p(a, t, u) + q(a, t)f(a, t, u, u_x) &= 0 \quad \text{para } x = a, \\ p(b, t, u) + q(b, t)f(b, t, u, u_x) &= 0 \quad \text{para } x = b, \end{aligned}$$

$p$ ,  $f$  pueden ser no lineales, mientras que  $q$  simplemente depende del tiempo y del espacio. Se puede imponer diferentes tipos de condiciones de frontera tales como Dirichlet, Neumann o Robin.

La llamada a la función *pdepe* tiene la siguiente sintaxis:

```
sol=pdepe(m,@PDEfun,@ICfun,@BCfun,xMesh,tSpan)
```

## Descripción

- La función **pdepe** resuelve PVIF de sistemas parabólicos y elípticos en las variables  $x, t$ ; consta de tres subrutinas como describiremos en líneas posteriores.
- **sol** es un arreglo tridimensional donde se almacenan los valores de la solución, **sol(:, :, k)** se refiere a la aproximación en la  $k$ -ésima componente del vector solución  $u$ , **sol(i, :, k)** es la aproximación de la  $k$ -ésima componente de la solución en un tiempo **tSpan(i)** en todos los puntos de la malla **xMesh(:)** y **sol(i, j, k)** significa la aproximación de la  $k$ -ésima componente de la solución en un tiempo **tSpan(i)** en el punto de la malla **xMesh(j)**.
- La función **PDEfun** calcula los términos **c**, **f**, **s** con los argumentos definidos por la EDP, es decir, con los argumentos de entrada que son  $x, t$ , los vectores  $u, dudx$ . La sintaxis está dada por

```
[c,f,s]=PDEfun(x,t,u,DuDx)
```

- **ICfun**, función que evalúa la condición inicial.

- La función `BCfun` evalúa las condiciones de frontera, su sintaxis está dada por

$$[p1, q1, pr, qr] = \text{BCfun}(x1, u1, xr, ur, t)$$

donde,

`u1` es la solución  $u$  evaluada en la frontera `x1=a`.

`ur` es la solución  $u$  evaluada en la frontera `xr=b`.

`p1`, `q1` son vectores columnas correspondiente a  $p$  y  $q$  evaluadas en `x1`, similarmente `pr`, `qr` correspondiente a `xr`.

- `xMesh` es el vector  $[x_0, x_1, \dots, x_n]$ , debe satisfacer  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ , y el tamaño debe ser mayor o igual a tres.
- `tSpan` es el vector  $[t_0, t_1, \dots, t_f]$ , satisfaciendo las mismas condiciones que `xMesh`.

La función predefinida `pdepe` de MATLAB es una implementación del método de las líneas (MOL), que consiste en aproximar algebraicamente las derivadas espaciales de la EDP por algún método numérico (diferencias finitas, elementos finitos, o volúmenes finitos, etc), así las derivadas espaciales ya no se expresan explícitamente en términos de la variable espacial  $x$  sino con una sola variable independiente, por lo general el tiempo  $t$ , obteniéndose un sistema de EDOs que se aproxima a la EDP original, luego este sistema de ODEs se integra con `ode15s` (tiene una gran capacidad para resolver ecuaciones diferenciales) obteniendo las soluciones aproximadas.

La documentación en MATLAB de la función predefinida `pdepe` tiene como principal referencia a [30]. En este artículo se describe la utilización del método de Galerkin para el caso regular y el método de Petrov-Galerkin para el caso singular en la discretización espacial para el método de las líneas, ya que a menudo existen singularidades debido al uso de coordenadas esféricas  $m = 2$  y cilíndricas  $m = 1$ , por lo que sus resultados son más precisos que cuando se aplican otros métodos existentes. El propósito de este trabajo fue proporcionar un método consistente para su implementación computacional y su posterior utilización en bibliotecas de softwares en general.

Para ilustrar la aplicación de la función `pdepe` vamos a considerar los siguientes ejemplos.



## Ejemplo 1

Sea la ecuación de Fisher, también definida en (4.52)

$$u_t = u_{xx} + u(1 - u) \quad -5 < x < 10, \quad 0 < t < 5,$$

sujeta a condiciones de frontera de la forma

$$u(-5, t) = \frac{1}{\left(1 + (\sqrt{2} - 1)e^{\frac{-5}{\sqrt{6}} - \frac{5}{6}t}\right)^2}$$

$$u(10, t) = \frac{1}{\left(1 + (\sqrt{2} - 1)e^{\frac{10}{\sqrt{6}} - \frac{5}{6}t}\right)^2}$$

y a una condición inicial

$$u(x, 0) = \frac{1}{\left(1 + (\sqrt{2} - 1)e^{\frac{x}{\sqrt{6}}}\right)^2}$$

Primero identificamos las variables de la ecuación de Fisher, tenemos  $m = 0$ ,  $c\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 1$ ,  $f\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = u_x$ ,  $s\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = u(1 - u)$ , ahora especificamos en líneas de código la subrutina que construye la EDP:

```
1 function [c, f, s]=PDEfun(x, t, u, DuDx)
2     c=1;
3     f=DuDx;
4     s=u*(1-u);
5 end
```

Con respecto a las condiciones de frontera tenemos

$$p(-5, t, u) = u - \frac{1}{\left(1 + (\sqrt{2} - 1)e^{\frac{-5}{\sqrt{6}} - \frac{5}{6}t}\right)^2}, \quad q(-5, t) = 0,$$

$$p(10, t, u) = u - \frac{1}{\left(1 + (\sqrt{2} - 1)e^{\frac{10}{\sqrt{6}} - \frac{5}{6}t}\right)^2}, \quad q(10, t) = 0,$$

en líneas de código queda expresada como

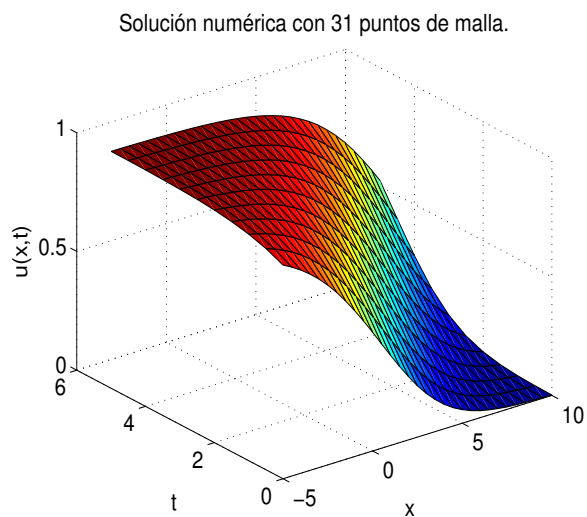
```
1 function [pl , q1 , pr , qr]=BCfun( xl , ul , xr , ur , t )
2     r=sqrt(2)-1;
3     v=1/sqrt(6);
4     w=5/sqrt(6);
5     pl=ul-1./(1+r*exp(v*(xl-w*t))).^2 ;
6     q1=0;
7     pr=ur-1./(1+r*exp(v*(xr-w*t))).^2;
8     qr=0;
9 end
```

y la condición de frontera

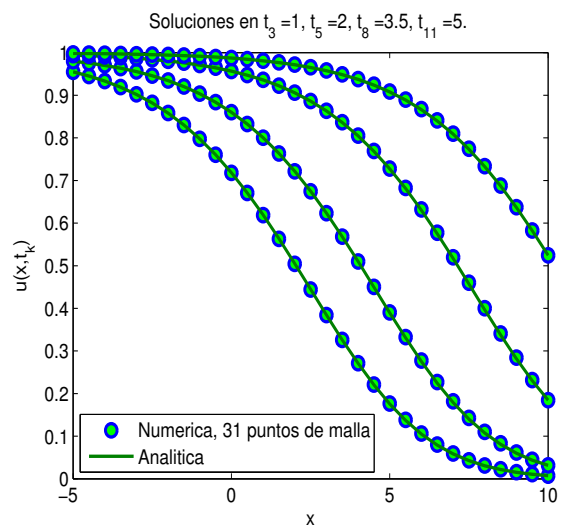
```
1 function u0=ICfun(x)
2     r=sqrt(2)-1;
3     u0=1./(1+r*exp(x/sqrt(6))).^2;
4 end
```

Mostramos un extracto de código en la cual realizamos la llamada a la función principal y los resultados se muestran en la Figura A.1.

```
1 clc
2 m=0;
3 % Discretizacion del espacio x y tiempo t
4 x=-5:0.5:10;
5 t=0:0.5:5;
6 % Llamada a la funcion principal
7 sol=pdepe(m, 'PDEfun', 'ICfun', 'BCfun', x, t); % (t,x)
```



(a) Solución numérica por pdepe.



(b) Solución analítica.

Figura A.1

## Ejemplo 2

Consideremos la ecuación de Fitzhugh-Nagumo como un ejemplo de sistema de reacción-difusión no lineal (tomado de [24]):

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u(0.1 - u)(u - 1) - v, \\ v_t = 0.01u. \end{cases}$$

Sujeto a las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} u_x(a, t) &= 0 = u_x(b, t), \\ v_x(a, t) &= 0 = v_x(b, t) \end{aligned}$$

y condiciones iniciales

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases} \quad v(x, 0) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Vamos a considerar el dominio  $D = \{-100 \leq x \leq 100, 0 \leq t \leq 50\}$ . A continuación expresamos el sistema en la forma requerida por pdepe.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} u_x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u(0.1 - u)(u - 1) - v \\ 0.01u \end{bmatrix},$$

donde

$$c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} u_x \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s = \begin{bmatrix} u(0.1 - u)(u - 1) - v \\ 0.01u \end{bmatrix}.$$

Las condiciones de frontera quedan expresadas en  $x = a$ :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ v_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

así

$$pl = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad ql = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Análogamente, en  $x = b$  tenemos

$$pr = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad qr = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Creamos las tres subrutinas con todas las variables especificadas como se muestra a continuación

```
1 %-----
2 function [c,f,s] = PDEfunE2(x,t,W,DuDx)
3 %W=[u,v]=[W(1),W(2)]
4 c = [1; 1];
```

```

5 f = [DuDx;0];
6 s=[W(1).*(0.1-W(1)).*(W(1)-1)-W(2); 0.01*W(1)];
7 end
8 %-----
9 function W0 = ICfunE2(x)
10 if x<0 W0(1)=1; else W0(1)=0; end;
11 if x<0 W0(2)=0; else W0(2)=1; end;
12 W0=[W0(1),W0(2)];
13 end
14 %-----
15 function [pl,q1,pr,qr] = BCfunE2(xl,ul,xr,ur,t)
16 pl = [0; 0];
17 q1 = [1; 1];
18 pr = [0; 0];
19 qr = [1; 1];
20 end

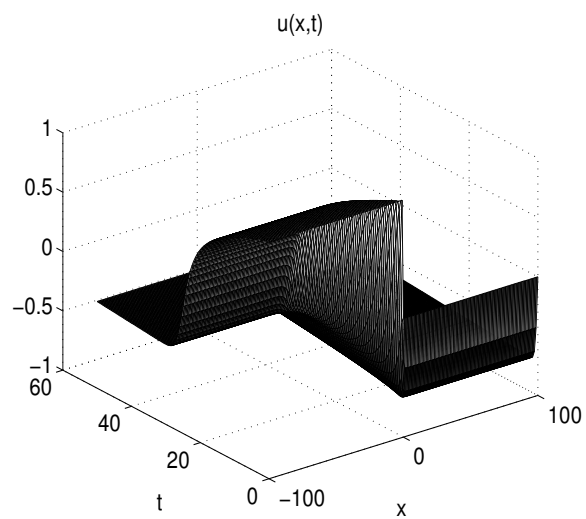
```

Luego, llamamos a la función pdepe para obtener las soluciones numéricas, los gráficos respectivos se ven en la Figura A.2.

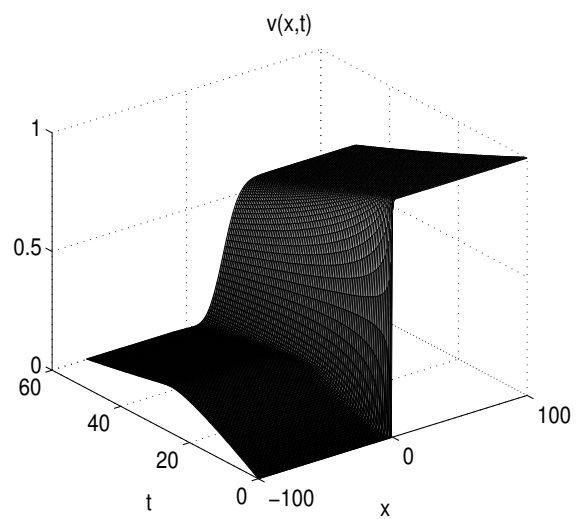
```

1 m = 0;
2 x = linspace(-100,100,201);
3 t = linspace(0,50,101);
4
5 sol = pdepe(m,@PDEfunE2,@ICfunE2,@BCfunE2,x,t);
6 u = sol(:, :, 1);
7 v = sol(:, :, 2);

```



(a) Solución numérica para  $u(x,t)$ .



(b) Solución numérica para  $v(x,t)$ .

Figura A.2

# Apéndice B

## Códigos de implementación

Programa B.1: Método de elementos finitos.

```
1 function U=MEF(x,t,p,q,U0,alpha,beta,eps) %U(x,t)
2 N=length(t);
3 m=length(x);
4 U=zeros(m,N);
5 U(:,1)=U0'; %U0=[U1 U2 U3 U4...]
6 for n=2:N %bucle con respecto al tiempo
7     deltaT=t(n)-t(n-1);
8     u_ant=U0;
9     F=FGlobal(x,U0,u_ant,alpha,beta,deltaT,p,q);
10    F_norm=norm(F);
11    contador=0;
12    while abs(F_norm)>eps && contador < 100 %inicio del metodo de Newton.
13        J=JGlobal(x,U0,alpha,beta,deltaT);
14        delta = J\ -F;
15        U0 = U0 + delta';
16        F=FGlobal(x,U0,u_ant,alpha,beta,deltaT,p,q);
17        F_norm = norm(F);
18        contador=contador+1;
19    end
20    if abs(F_norm) > eps
21        contador = -1;
22    end
```

```

23     U(:,n)=U0';
24 end
25
26 end

```

#### Programa B.2: Vector local F.

```

1 function FL= Flocal(x,u,u_ant , alpha , beta , deltaT , e)
2 xnodos=[-0.9061798459 -0.5384693101 0.0000000000 0.5384693101 0.9061798459];
3 w=[0.2369268851 0.4786286705 0.5688888888 0.4786286705 0.2369268851];
4 h=x(e+1)-x(e);
5 FL=zeros(2,1);
6 for i=1:2
7     for p=1:5
8         %%%%%%%%%%%
9         z=xnodos(p);
10        phi_local=[0.5-0.5*z 0.5+0.5*z ];
11        Der_phi_local=[-0.5 0.5];
12        LocalU=u(e)*phi_local(1)+u(e+1)*phi_local(2);
13        LocalU_ant=u_ant(e)*phi_local(1)+u_ant(e+1)*phi_local(2);
14        Der_LocalU=u(e)*Der_phi_local(1)+u(e+1)*Der_phi_local(2);
15        g=beta*LocalU*(1-LocalU);
16        %%%%%%%%%%%
17        FL(i)=FL(i)+ h/2*w(p)*(-alpha*4/h^2*Der_LocalU*Der_phi_local(i) -...
18        LocalU*phi_local(i)/deltaT+g*phi_local(i)+ LocalU_ant*phi_local(i)/
        deltaT);
19    end
20
21 end
22 end %fin de la funcion aninada

```

#### Programa B.3: Matriz local J.

```

1 function JL= Jlocal(x,u, alpha , beta , deltaT , e)
2 xnodos=[-0.9061798459 -0.5384693101 0.0000000000 0.5384693101 0.9061798459];
3 w=[0.2369268851 0.4786286705 0.5688888888 0.4786286705 0.2369268851];
4 h=x(e+1)-x(e);
5 JL=zeros(2,2);
6 for i=1:2
7     for j=1:2

```



```

8      for p=1:5
9          z=xnodos(p);
10         phi_local=[0.5-0.5*z  0.5+0.5*z  ];
11         Der_phi_local=[-0.5  0.5];
12         LocalU=u(e)*phi_local(1)+u(e+1)*phi_local(2);
13         Der_g=beta*(1-2*LocalU);
14         %%%%%%%%%%%%%%%
15         JL(i,j)=JL(i,j)+ h/2*w(p)*(-alpha*4/h^2*Der_phi_local(j)*Der_phi_local(i)
16         -...
17         phi_local(j)*phi_local(i)/deltaT+Der_g*phi_local(j)*phi_local(i));
18     end
19
20 end
21 end
22
23 end

```

Programa B.4: Emsamblaje del vector F.

```

1 function F=FGlobal(x,u,u_ant , alpha , beta , deltaT ,p,q)
2 m=length(x);
3 F=zeros(m,1);
4 FL=Flocal(x,u,u_ant , alpha , beta , deltaT ,1);
5 F(1)=FL(1)-alpha*p;
6 for e=2:m-1
7     FFlocal=Flocal(x,u,u_ant , alpha , beta , deltaT ,e-1);
8     FFFlocal=Flocal(x,u,u_ant , alpha , beta , deltaT ,e);
9     F(e)=FFlocal(2)+FFFlocal(1);
10 end
11 FL=Flocal(x,u,u_ant , alpha , beta , deltaT ,m-1);
12 F(m)=FL(2)+alpha*q;
13 end

```

Programa B.5: Emsamblaje de la matriz Jacobiana.

```

1 function J=JGlobal(x,u, alpha , beta , deltaT)
2 m=length(x);
3 J=zeros(m,m);
4 JL1= Jlocal(x,u, alpha , beta , deltaT ,1);

```

```

5 J(1,1)=JL1(1,1);
6 for e=1:m-1
7     JL= Jlocal(x,u,alpha,beta,deltaT,e);
8     J(e,e+1)=JL(1,2);
9     J(e+1,e)=JL(2,1);
10
11 end
12 for e=2:m-1
13     JL= Jlocal(x,u,alpha,beta,deltaT,e-1);
14     JLL= Jlocal(x,u,alpha,beta,deltaT,e);
15     J(e,e)=JL(2,2)+JLL(1,1);
16 end
17 Jlm= Jlocal(x,u,alpha,beta,deltaT,m-1);
18 J(m,m)=Jlm(2,2);
19 end

```

# Bibliografía

- [1] ABLOWITZ, M. J. y A. ZEPPETELLA (1979). Explicit solutions of Fisher's equation for a special wave speed. *Bulletin of Mathematical Biology*. 41(6), 835–840.
- [2] BASTANI, M. y D. K. SALKUYEH (2012). A highly accurate method to solve Fisher's equation. *Pramana*. 78(3), 335–346.
- [3] BECKER, E.B., CAREY, G.F. y J.T. ODEN (1981). *Finite elements. 1. An introduction*. Prentice-Hall.
- [4] BRENNER, S. y R. SCOTT (2007). *The mathematical theory of finite element methods*. Springer Science & Business Media.
- [5] BURDEN, R. L. y J. D. FAIRES (2011). *Numerical Analysis. Ninth Edition*. BROOKS/-COLE.
- [6] CAREY, G. F. y Y. SHEN (1995). Least-squares finite element approximation of Fisher's reaction–diffusion equation. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. 11(2), 175–186.
- [7] CORNEJO-PÉREZ, O. y H. C. ROSU (2005). Nonlinear second order Ode's: factorizations and particular solutions. *Progress of Theoretical Physics*. 114(3), 533–538.
- [8] DEBNATH, L. (2011). *Nonlinear partial differential equations for scientists and engineers*. Springer Science & Business Media.
- [9] EVANS, G., BLACKLEDGE, J. y P. YARDLEY (2012). *Numerical methods for partial differential equations*. Springer Science & Business Media.

- [10] GOCKENBACH, M. S. (2005). *Partial differential equations: analytical and numerical methods*. SIAM.
- [11] GRIFFITHS, G. Y W. E. SCHIESSER (2010). *Traveling wave analysis of partial differential equations: numerical and analytical methods with MATLAB and Maple*. Academic Press.
- [12] KATTAN, P. I. (2010). *MATLAB guide to finite elements: an interactive approach*. Springer Science & Business Media.
- [13] KELLEY, W. G. Y A. C. PETERSON (2010). *The theory of differential equations: classical and qualitative*. Springer Science & Business Media.
- [14] KIM, N. (2014). *Introduction to nonlinear finite element analysis*. Springer Science & Business Media.
- [15] LANGTANGEN, H. P. Y A. LOGG (2017). *Solving PDEs in Python: The FEniCS Tutorial I*. Springer International Publishing Berlin.
- [16] LANGTANGEN, H. P. Y K. A. MARDAL (2016). *Introduction to Numerical Methods for Variational Problems*. Preprint.
- [17] LARSON, M. G. Y F. BENGZON (2013). *The finite element method: Theory, implementation, and applications*. Springer Science & Business Media.
- [18] LI, Z., QIAO, Z. Y T. TANG (2017). *Numerical Solutions of Partial Differential Equations—An Introduction to Finite Difference and Finite Element Methods*. Cambridge University Press.
- [19] LOGAN, J. D. (2008). *An introduction to nonlinear partial differential equations* (Vol. 89). John Wiley & Sons.
- [20] LOGG, A., MARDAL, K. A. Y G. WELLS (2012). *Automated solution of differential equations by the finite element method: The FEniCS book*. Springer Science & Business Media.
- [21] MICKENS, R. E. (1994). A best finite-difference scheme for the fisher equation. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. 10(5), 581–585.
- [22] MITTAL, R. C. Y S. KUMAR (2006). Numerical study of Fisher’s equation by wavelet Galerkin method. *International Journal of Computer Mathematics*. 83(3), 287–298.

- [23] MURRAY, J. D. (2002). *Mathematical biology I. An interdisciplinary applied mathematics*. New York, Springer.
- [24] POLYANIN, A. D. y V. F. ZAITSEV (2016). *Handbook of nonlinear partial differential equations*. Chapman and Hall/CRC.
- [25] QUARTERONI, A., SACCO, R. y F. SALERI (2010). *Numerical mathematics*. Springer Science & Business Media.
- [26] REDDY, J. N. (2014). *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis: with applications to heat transfer, fluid mechanics, and solid mechanics*. OUP Oxford.
- [27] ROSU, H. C. y O. CORNEJO-PÉREZ (2005). Supersymmetric pairing of kinks for polynomial nonlinearities. *Physical Review E*. 71(4), 046607.
- [28] SALSA, S. (2016). *Partial differential equations in action: from modelling to theory*. Springer.
- [29] SHINGAREVA, I. y C. LIZÁRRAGA-CELAYA (2011). *Solving Nonlinear Partial Differential Equations with Maple and Mathematica*. Springer Science & Business Media.
- [30] SKEEL, R. D. y M. BERZINS (1990). A method for the spatial discretization of parabolic equations in one space variable. *SIAM journal on scientific and statistical computing*. 11(1), 1–32.
- [31] SVEIN, L. y H. LANGTANGEN (2016). *Programming for Computations-MATLAB/Octave: A Gentle Introduction to Numerical Simulations with MATLAB/Octave*. Springer.
- [32] TAMSIR, M., SRIVASTAVA, V. K., DHIMAN, N. y A. CHAUHAN (2018). Numerical Computation of Nonlinear Fisher’s Reaction–Diffusion Equation with Exponential Modified Cubic B-Spline Differential Quadrature Method. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*. 4(1), 6.
- [33] TANG, S. y R. O. WEBER (1991). Numerical study of Fisher’s equation by a Petrov-Galerkin finite element method. *The ANZIAM Journal*. 33(1), 27–38.
- [34] TAYLOR, M. E. (1997). *Partial differential equations III. Nonlinear equations*. Vol 117. *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York.

- [35] TVEITO, A. y R. WINTHER (2004). *Introduction to partial differential equations: a computational approach*. Springer Science & Business Media.
- [36] WHITELEY, J. (2017). *Finite Element Methods: A Practical Guide*. Springer.
- [37] XUE, D. y Y. CHEN (2008). *Solving applied mathematical problems with MATLAB*. Chapman and Hall/CRC.
- [38] YUAN, W., CHEN, Q., QI, J., y Y. LI (2013). The general traveling wave solutions of the Fisher equation with degree three. *Advances in Mathematical Physics*.